Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

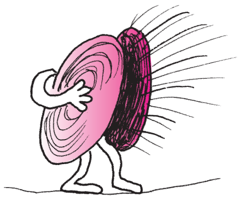
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2003

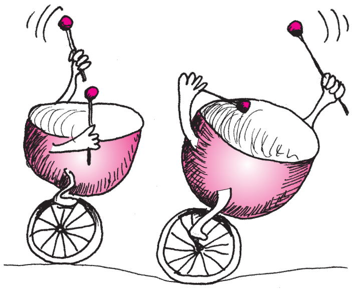
Przypominamy treść zadań:

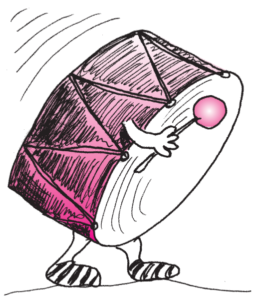
459. W czworokącie $ABCD$ boki BC i DA mają jednakową długość. Symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkt P leży na symetralnej odcinka łączącego środki boków BC i DA.

460. Dowieść, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0; \pi/4\rangle$ zachodzi nierówność

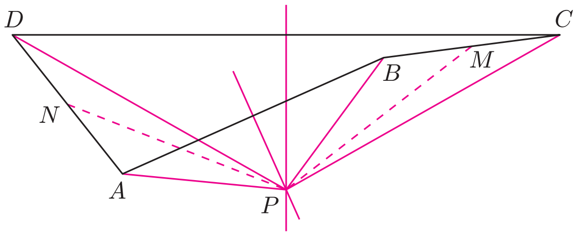
$$\sqrt[n]{(\operatorname{tg} x_1)(\operatorname{tg} x_2)\ldots(\operatorname{tg} x_n)} \leqslant \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}\,.$$







459. Niech M będzie środkiem boku BC, a N środkiem boku DA.



Ponieważ $|PB| = |PA|$, $|PC| = |PD|$ oraz $|BC| = |DA|$, trójkąty PBC i PAD są przystające. Ich odpowiednie środkowe PM i PN są więc równe; a to znaczy, że P leży na symetralnej odcinka MN.

460. Jeżeli liczby x_i (dla $i = 1, 2, \ldots, n$) należą do przedziału $\langle 0; \pi/4\rangle$, to liczby $a_i = \operatorname{tg}^2 x_i$ należą do przedziału $\langle 0; 1\rangle$ oraz

$$\frac{\sum \sin^2 x_i}{\sum \cos^2 x_i} = \frac{n}{\sum \cos^2 x_i} - 1 = \frac{n}{\sum (1+a_i)^{-1}} - 1$$

(we wszystkich sumach wskaźnik sumowania i biegnie od 1 do n). Mamy udowodnić, że wartość tego wyrażenia jest niemniejsza niż $\bigl(\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} x_n\bigr)^{2/n} = \bigl(a_1 a_2 \ldots a_n\bigr)^{1/n}$, czyli że

$$(*) \qquad \frac{1}{n}\sum \frac{1}{1+a_i} \leqslant \frac{1}{1 + \bigl(\prod a_i\bigr)^{1/n}}$$

dla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \langle 0; 1\rangle$. Gdy którakolwiek z liczb a_i jest równa zeru, nierówność zachodzi. Dalej przyjmijmy, że liczby a_i są dodatnie i oznaczmy

$$a_i = \mathrm{e}^{-t_i} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n; \qquad t_i \geqslant 0.$$

Funkcja $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$ jest wklęsła w przedziale $\langle 0; \infty)$ (łatwo sprawdzić, że $f''(t) < 0$). Spełnia więc nierówność Jensena

$$\frac{1}{n}\sum f(t_i) \leqslant f\Bigl(\frac{1}{n}\sum t_i\Bigr),$$

która jest równoważnym zapisem dowodzonej nierówności $(*)$ przy podstawieniu $a_i = \mathrm{e}^{-t_i}$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
451 ($WT = 1{,}11$) i **452** ($WT = 3{,}48$)
z numeru 12/2002

Jerzy Cisło	– Wrocław	45,71
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	36,24

Pan Cisło – po raz drugi.

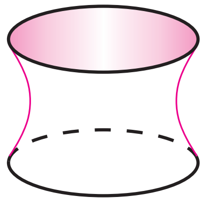
Klub 44

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2003

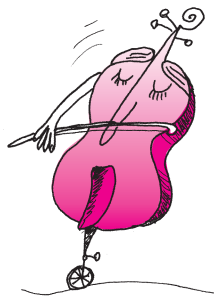
Przypominamy treść zadań:

356. Z cienkiego drutu wykonano dwa jednakowe kółka o promieniu r_0. Kółka zetknięto i zwilżono wodą z mydłem (tylko sam brzeg, wnętrze kółek nie było pokryte błonką), a następnie powoli rozsuwano w kierunku prostopadłym do ich płaszczyzny (rysunek 1). Na jaką maksymalną odległość można je odsunąć, żeby łącząca je błonka nie przerwała się? Obok rozwiązania analitycznego lub numerycznego dopuszczalna jest też odpowiedź oparta na przeprowadzonym doświadczeniu.



Rys. 1

357. Siły jądrowe wiążą jądra atomowe tak mocno, że podwyższenie temperatury materii nawet do kilkunastu milionów stopni nie jest w stanie wpłynąć na budowę wewnętrzną jąder. Dlaczego więc rozpad izotopu berylu ^{7}Be zachodzi we wnętrzu Słońca znacznie wolniej niż w laboratorium ziemskim?

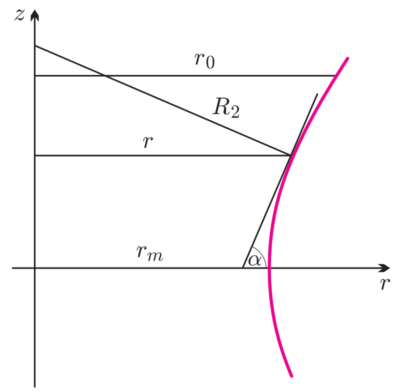


356. Błonka mydlana ma taki kształt, że jej powierzchnia (a więc i energia powierzchniowa) jest minimalna. Według geometrii różniczkowej średnia krzywizna powierzchni (dana wyrażeniem $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, gdzie R_1 i R_2 są tzw. głównymi promieniami krzywizny) jest wtedy równa zeru.

Błonkę o symetrii obrotowej wokół osi z przedstawmy w przekroju (rys. 2), wtedy jeden z tych promieni jest promieniem krzywizny otrzymanej krzywej, czyli

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s},$$

gdzie $\mathrm{d}\alpha$ jest zmianą kierunku stycznej przy przesunięciu $\mathrm{d}s$ wzdłuż krzywej.

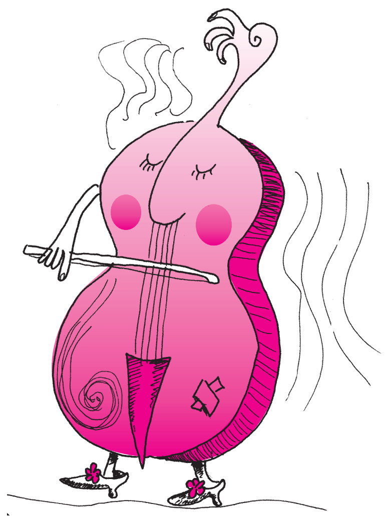


Rys. 2

Drugi z promieni jest związany z krzywizną przekroju w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku i wynosi

$$R_2=\frac{r}{\sin\alpha}$$

(por. w poradnikach matematycznych wzory opisujące krzywiznę powierzchni).



Zerowa wartość krzywizny średniej oznacza więc spełnianie równania

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=-\frac{\sin\alpha}{r}.$$

Podstawiamy $\mathrm{d}s=\mathrm{d}r/\cos\alpha$ i całkując otrzymujemy $r\sin\alpha=\text{const.}=r_m$, gdzie r_m jest minimalną wartością r, odpowiadającą kątowi $\alpha=\pi/2$.

W następnym kroku zbadamy funkcję $z(r)$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{r_m}{\sqrt{r^2-r_m^2}}.$$

Całkowanie w granicach od r_m do r_0 daje nam równanie

$$\frac{z_0}{r_0}=\frac{r_m}{r_0}\ln\left(\frac{r_0}{r_m}+\sqrt{\left(\frac{r_0}{r_m}\right)^2-1}\right),$$

przy czym początek osi z przyjęliśmy w środku między kółkami (gdzie $r=r_m$), czyli z_0 jest połową odległości między kółkami. (Powyższe wyrażenie można zapisać prościej, posługując się funkcjami hiperbolicznymi.)

Jak wykazują obliczenia numeryczne, maksymalną wartością z_0/r_0 jest 0,66274, a zatem maksymalną odległością między kółkami jest $1{,}3255\cdot r_0$. Wartość ta jest osiągana dla

$$\frac{r_m}{r_0}=0{,}5524.$$

357. Izotop ^{7}Be rozpada się drogą wychwytu elektronu. We wnętrzu Słońca elektrony z powłoki K ulegają wzbudzeniu lub jonizacji, co zwiększa ich średnią odległość od jądra i zmniejsza prawdopodobieństwo wychwytu.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **352** ($WT=2{,}35$) i **353** ($WT=2{,}55$) z numeru 2/2003

Marek Wójcicki	– Szczecin	46,22
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	43,00
Tomasz Wietecha	– Tarnów	40,83
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	20,09
Michał Jóźwikowski	– Błonie	14,77

Witamy nowego Weterana Klubu 44 F – p. Wójcickiego.