Graniastosłup spotyka płaszczyznę

Zbigniew MARCINIAK

W *Delcie* 12/2002 Michał Szurek opisał, jak popijając herbatę oraz bawiąc się programowalnym kalkulatorem podczas podróży koleją, odkrył następujące

1. Twierdzenie. *Jeżeli graniastosłup prosty, którego podstawą jest $2n$-kąt foremny, przekroimy płaszczyzną tak, że przetnie ona krawędzie boczne kolejno w punktach leżących na wysokości $d_0, d_1, \ldots, d_{2n-1}$ nad dolną podstawą, to dla $n = 2, 3, 4, 6$ zachodzi równość*

$$d_0^{n-1} + d_2^{n-1} + \ldots + d_{2n-2}^{n-1} = d_1^{n-1} + d_3^{n-1} + \ldots + d_{2n-1}^{n-1}.$$

To mnie zaintrygowało: równe sumy wysokich potęg odległości punktów od podstawy – z czego może wynikać tak nietypowy dla geometrii związek? No i jak to jest dla innych wartości n?

Niestety, na kalkulator nie mogłem liczyć: po pierwsze, mój kalkulator wykonuje tylko cztery działania. Po drugie – jeśli Michał Szurek z kalkulatora więcej nie wycisnął, to mnie się pewnie też nie uda. Zrobiłem więc sobie herbaty, wziąłem kartkę i zacząłem liczyć.

Gdy we wzorze z Twierdzenia 1 przeniesiemy wszystkie wyrazy na lewą stronę, otrzymamy równość $\sum\limits_{j=0}^{2n-1} (-1)^j d_j^{n-1} = 0$. Spróbujmy zatem zbadać wyrażenie $\sum\limits_{j=0}^{2n-1} (-1)^j d_j^k$ dla par liczb naturalnych n i k.

Oznaczmy $\alpha = 2\pi/2n$ i umieśćmy w przestrzeni prostokątny układ współrzędnych tak, by wierzchołki dolnej podstawy graniastosłupa miały współrzędne $(\cos j\alpha, \sin j\alpha, 0)$ dla $0 \leqslant j \leqslant 2n-1$. Płaszczyzna tnąca ma równanie postaci $z = ax + by + c$, zatem krawędzie boczne przebiją ją w punktach o współrzędnych $(\cos j\alpha, \sin j\alpha, a\cos j\alpha + b\sin j\alpha + c)$, tj. na wysokości $d_j = a\cos j\alpha + b\sin j\alpha + c$ nad podstawą.

Jeśli $a = b = 0$, to $d_j = c$ i badane wyrażenie redukuje się do $c^k \cdot \sum\limits_{j=0}^{2n-1} (-1)^j = 0$.

Wobec tego będziemy dalej zakładać, że $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. Dobierzmy kąt β tak, by $a/\rho = \cos\beta$, $b/\rho = \sin\beta$. Wtedy

$$d_j = \rho(\cos\beta\cos j\alpha + \sin\beta\sin j\alpha) + c = \rho\cos(\beta - j\alpha) + c.$$

Badane wyrażenie

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \big(\rho\cos(\beta - j\alpha) + c\big)^k$$

zależy, *a priori*, od trzech parametrów: c, ρ i β. Jako funkcja zmiennej c jest to wielomian stopnia co najwyżej k, postaci

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \rho^r s_r c^{k-r}, \quad \text{gdzie} \quad s_r = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos^r(\beta - j\alpha).$$

Zajmiemy się obliczeniem sum s_r. Przypomnijmy, że $\alpha = 2\pi/2n$.

2. Lemat. *Niech φ będzie kątem postaci $l\alpha$, dla pewnej liczby całkowitej l. Dla dowolnego kąta γ zachodzi równość*

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos(\gamma - j\varphi) = \begin{cases} 2n \cdot \cos\gamma, & \text{gdy } l \text{ jest postaci } (2s-1)n; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania M 1033.
Zauważmy, że

$$W(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \equiv \equiv (x-1)^3 + 2 \pmod{2003}.$$

Udowodnimy, że funkcja

$$\overline{W}(x) = (x-1)^3 + 2 \bmod 2003$$

jest permutacją zbioru

$$\mathbb{Z}_{2003} = \{0, 1, \ldots, 2002\}.$$

Wystarczy uzasadnić, że przyporządkowanie

$$x \mapsto x^3 \bmod 2003, \quad x \in \mathbb{Z}_{2003}$$

jest różnowartościowe.

Przypuśćmy, że $x^3 \equiv y^3 \pmod{2003}$. Ponieważ 2003 jest liczbą pierwszą, na mocy małego twierdzenia Fermata mamy

$$\left(x^3\right)^{668} = x^{2002+2} \equiv x^2 \pmod{2003}.$$

Zatem z naszego przypuszczenia wynika, że $x^2 \equiv y^2$, skąd $y \equiv \pm x$. Jeśli $y \equiv -x$, to mielibyśmy $x^3 \equiv (-x)^3$, czyli $x \equiv y \equiv 0$. Zatem rzeczywiście $x \equiv y \pmod{2003}$.

Pozostaje dowieść, że jeśli

$$\pi : S \to S$$

jest dowolną permutacją zbioru skończonego $S = \{0, 1, \ldots, m\}$, to istnieje takie n, że

$$\underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{n \text{ razy}}$$

jest identycznością na S.

Dla dowolnego $a \in S$ ciąg $a, \pi(a), \pi(\pi(a)), \ldots$ jest okresowy, począwszy od pierwszego wyrazu. Niech t_a będzie długością okresu tego ciągu. Wówczas $\pi^{kt_a}(a) = a$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\pi^{t_0 t_1 \cdots t_m}(x) = x$$

dla dowolnego $x \in S$.

Rozwiązanie zadania M 1034.
Załóżmy, że

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Wówczas

$$P(a_i)Q(a_i) = W(a_i) = -1.$$

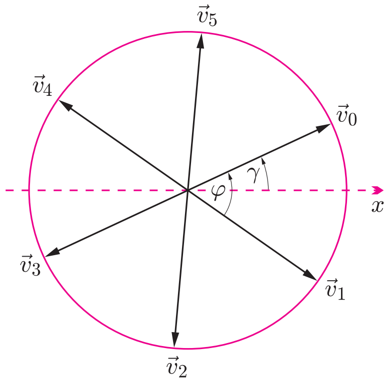
Ponieważ $P(a_i), Q(a_i) \in \mathbb{Z}$, więc

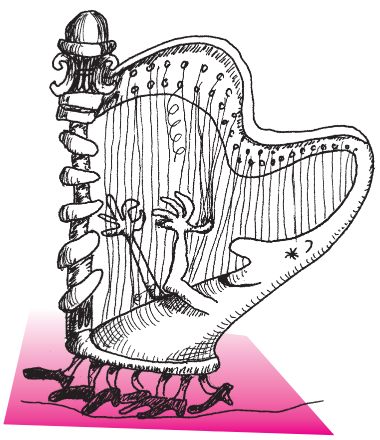
$$Q(a_i) = -P(a_i) = \pm 1.$$

Niech

$$V(x) = P(x) + Q(x).$$

Wówczas wielomian $V(x)$ jest stopnia mniejszego od n i ma co najmniej n pierwiastków (są nimi $a_1, \ldots, a_n$). Jest więc $V(x) \equiv 0$, zatem $P(x) = -Q(x)$, $W(x) = -Q^2(x)$, co jest niemożliwe, gdyż współczynnik przy x^n w wielomianie W jest dodatni (równy 1).





Dowód. Ponieważ $-\cos x = \cos(x-\pi)$ oraz $\cos x = \cos(x-2\pi)$, mamy

$$\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\cos(\gamma - j\varphi) = \sum_{j=0}^{2n-1}\cos(\gamma - j\varphi - j\pi) = $$
$$= \sum_{j=0}^{2n-1}\cos(\gamma - j\psi), \quad \text{gdzie} \quad \psi = \varphi + \pi.$$

Rozważmy na płaszczyźnie układ wektorów jednostkowych $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{2n-1}$, zaczepionych w początku układu i tworzących z dodatnią półosią osi OX kąty γ, $\gamma-\psi$, $\gamma-2\psi$,…, $\gamma-(2n-1)\psi$ oraz sumę $\vec{v}$ tych wektorów. Gdy $l=(2s-1)n$, kąt ψ jest postaci $2s\pi$ i wszystkie wektory $\vec{v}_j$ pokrywają się z $\vec{v}_0$, zatem $\vec{v} = 2n\cdot\vec{v}_0$. W przeciwnym przypadku obrót płaszczyzny o kąt $-\psi$ zmienia położenie każdego niezerowego wektora, przy czym $\vec{v}_0$ przechodzi na $\vec{v}_1$, $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2, \ldots,$ w końcu $\vec{v}_{2n-1}$ przechodzi na $\vec{v}_0$. Wynika stąd, że obrócone wektory mają nadal sumę $\vec{v}$, a stąd $\vec{v}=0$. Wystarczy teraz zauważyć, że wzór z lematu to równość pierwszych współrzędnych wektorów $\sum_{j=0}^{2n-1}\vec{v}_j$ oraz $\vec{v}$.

Z wykładnikami potęg przy kosinusach poradzimy sobie dzięki następującej obserwacji.

3. Lemat. *Dla dowolnej liczby naturalnej r istnieją takie współczyniki a_l $(0\leqslant l\leqslant r)$, że ma miejsce tożsamość $\cos^r x = \sum_{l=0}^{r} a_l\cdot\cos lx$. Co więcej, $a_r = 2^{-r+1}$.*

Dowód. Poprowadzimy indukcję względem r. Dla $r=1$ to oczywiście prawda. Załóżmy, że uzyskaliśmy już odpowiedni wzór dla pewnego $r\geqslant 1$. Wtedy

$$\cos^{r+1}x = \cos x\cdot\sum_{l=0}^{r}a_l\cdot\cos lx = \sum_{l=0}^{r}a_l\cdot\cos x\cos lx =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{r}a_l\cdot\big[\cos(l+1)x + \cos(l-1)x\big] \text{ jest też żądanej postaci.}$$

Zgromadziliśmy już dość informacji, by obliczyć s_r dla $r\leqslant n$.
Na mocy Lematu 3 mamy:

$$s_r = \sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\cos^r(\beta - j\alpha) = \sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\sum_{l=0}^{r}a_l\cdot\cos l(\beta - j\alpha) =$$
$$= \sum_{l=0}^{r}a_l\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\cos\big(l\beta - j(l\alpha)\big).$$

Na mocy Lematu 2 suma stojąca po a_l nie znika tylko wtedy, gdy l jest nieparzystą wielokrotnością n. Gdy $r<n$, żadna z liczb $0\leqslant l\leqslant r$ nie spełnia tego warunku, a stąd $s_r=0$. Natomiast $s_n = a_n\cdot 2n\cos n\beta = 2^{-n+2}n\cos n\beta$.

Podsumujmy:

$$\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j d_j^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\rho^r s_r c^{k-r} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k<n; \\ \rho^n 2^{-n+2}n\cos n\beta \neq 0, & \text{gdy } k=n. \end{cases}$$

Udowodniliśmy zatem

4. Twierdzenie. *Niech $n\geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli graniastosłup prosty, którego podstawą jest $2n$-kąt foremny, przekroimy płaszczyzną tak, że przetnie ona krawędzie boczne kolejno w punktach leżących na wysokości $d_0, d_1, \ldots, d_{2n-1}$ nad dolną podstawą, to dla wykładników $k=0,1,\ldots,n-1$ zachodzą równości*

$$d_0^k + d_2^k + \ldots + d_{2n-2}^k = d_1^k + d_3^k + \ldots + d_{2n-1}^k.$$

Natomiast dla wykładnika $k=n$ podobna tożsamość nie zachodzi – różnica między stroną lewą i prawą zależy od położenia płaszczyzny tnącej.