mała delta

Kiedy więcej, kiedy mniej

Każdą liczbę dodatnią c można, rzecz jasna, przedstawić w postaci sumy dwóch składników dodatnich na bardzo wiele sposobów. Mówiąc szczerze, na nieskończenie wiele sposobów. O ile jednak suma takich dwóch składników jest zawsze równa c, o tyle ich iloczyn wcale nie jest stały. Na przykład, $2+3=5$, $1+4=5$ i $\sqrt{2}+(5-\sqrt{2})=5$, ale żadne dwie z liczb $2\cdot 3, 1\cdot 4, \sqrt{2}\cdot(5-\sqrt{2})$ nie są równe. Czy można wśród wszystkich iloczynów znaleźć największy? Dokładniej, czy spośród wszystkich par liczb dodatnich x, y, takich że $x+y=c$ dla pewnej ustalonej liczby dodatniej c, istnieje para, której iloczyn jest największy?

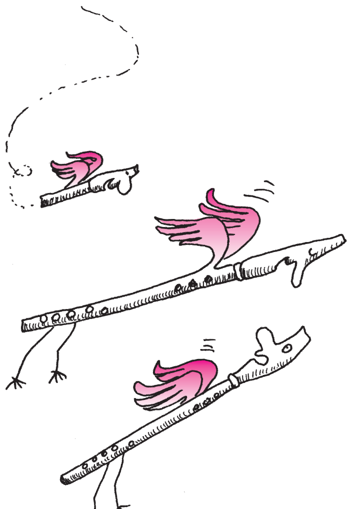
Aby się o tym przekonać, zajmijmy się przez chwilę inną nierównością. Wykażemy mianowicie, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Stąd już krok do nierówności

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0,$$

prawdziwej dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y. Co więcej, równość w tej, a więc i w pierwszej nierówności, mamy wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$.



Z powyższego rozumowania wynika, że iloczyn dwóch liczb dodatnich x, y nigdy nie jest większy od $\frac{(x+y)^2}{4}$ i jest tej ostatniej liczbie równy tylko wtedy, gdy $x=y$. W takim razie:

jeśli $x+y=c$, to największy iloczyn xy otrzymamy wtedy, gdy $x=y$.

Na przykład, spośród wszystkich prostokątów o stałym obwodzie c największe pole ma kwadrat (o boku $c/4$), spośród wszystkich trójkątów prostokątnych o stałej sumie długości przyprostokątnych największe pole ma trójkąt równoramienny itp. Ale z nierówności $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ lub równoważnej jej nierówności $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$ możemy wywnioskować coś więcej. Wynika z niej bowiem, że suma dwóch liczb dodatnich nigdy nie jest mniejsza niż podwojony pierwiastek kwadratowy z ich iloczynu, a równość, jak wiemy, jest wtedy, gdy $x=y$.

Mamy zatem następujące twierdzenie:

jeśli $xy=c$, to najmniejszą sumę $x+y$ otrzymamy wtedy, gdy $x=y$.

Na przykład: spośród wszystkich prostokątów o stałym polu najmniejszy obwód ma kwadrat, spośród wszystkich trójkątów prostokątnych o stałym polu najmniejszą sumę długości przyprostokątnych ma trójkąt równoramienny itp.

W. B.

Co to jest temperatura?

– zapytałem wczoraj Maćka, mojego młodszego brata. Spojrzał na mnie zdziwiony.

– No przecież wiadomo. Zero to jest temperatura zamarzania wody, a sto stopni to temperatura wrzenia. Dzieli się skalę termometru na sto równych części. A w skali Kelvina...

– Zaraz, zaraz – powstrzymałem go. – Nie tak szybko. A... co to jest termometr?

– Ty chyba mnie nabierasz. W tym jest pewnie jakiś haczyk?

– Ależ skąd, to jest zupełnie uczciwe pytanie.

– Coś ty z byka spadł, termometru nie widziałeś? – zezłościł się Maciek. – Was na tych studiach chyba zupełnie ogłupiają!

– Powiedzmy, że nie widziałem. Czy mógłbyś mi go dokładnie opisać? – zapytałem b a r d z o spokojnie. (Nie daruję mu tego ogłupiania, poczekaj, zobaczymy, czyje będzie na wierzchu!)

– No... bierze się bańkę szklaną z zabarwionym alkoholem, cienką rurkę...

Nie dałem mu dokończyć.

– A dlaczego właściwie z alkoholem? Czy nie mogłaby być inna ciecz?

– Mogłaby, jasne. Na przykład rtęć...

– Dlaczego rtęć? A oleju, gliceryny, benzyny nie można by nalać? A może po prostu wody?

– Wody nie, bo jak zamarznie, to rozsadzi termometr. Ale olej, jeśli nie krzepnie, to mógłby być chyba równie dobry – Maciek był jakby odrobinę mniej pewny siebie.

– Co to znaczy „równie dobry”? Jaką masz gwarancję, że równe odstępy temperatury na skali rtęciowej będą odpowiadać równym odstępom na olejowej? A jeśli się okaże, że temperatura, która na termometrze rtęciowym jest w połowie odległości między zerem a stu stopniami, na termometrze olejowym będzie równa nie 50, tylko 49 albo 52 stopnie, to co wtedy?

Namyślał się przez chwilę.

– Chodzi ci pewnie o to, że ta ciecz powinna się rozszerzać równomiernie...

– Co to znaczy? Jak sprawdzisz, czy dana ciecz rozszerza się równomiernie?

– Trzeba znaleźć współczynnik rozszerzalności cieplnej – przypomniało się coś Maćkowi – czyli stosunek względnego przyrostu objętości do przyrostu temperatury. Ten współczynnik powinien być stały...

– Przecież temperatura nie jest jeszcze zdefiniowana, i nie wiesz, ile wynosi ten przyrost temperatury! To jest błędne koło! Żeby wprowadzić współczynnik rozszerzalności cieplnej, trzeba najpierw mieć skalę temperatur. Czy w drugiej klasie nie nauczyłeś się jeszcze unikać takich pętli?

Uszy Maćka poczerwieniały. Tym razem odpowiedź przyszła po dłuższej chwili.

– Ty się mnie czepiasz. Przecież można się po prostu umówić, że definiujemy skalę według termometru rtęciowego. Zresztą różnice między różnymi skalami temperatur będą niewielkie, przynajmniej dla większości cieczy... więc cały ten problem nie ma większego praktycznego znaczenia.

– Może nie ma większego znaczenia, jeśli chodzi o przedział $0°$–$100°$, który jest stosunkowo nieduży, ale jak ustalisz, czy przyrost o 1 stopień w okolicy $-100°$C jest „taki sam”, jak przyrost o 1 stopień w okolicy $+300°$C? Zapewniam cię, że różnice między wskazaniami różnych termometrów mogą tu być bardzo poważne. Termometr rtęciowy nie obejmuje zresztą takiego zakresu, bo rtęć krzepnie w $-39°$C. A w ogóle... chcesz wprowadzić w tej sprawie jakąś dowolną umowę? Mało ci, że istnieją skale Celsjusza, Kelvina, Fahrenheita, choć różnią się tylko o przesunięcie i przemnożenie przez stałą, to chciałbyś jeszcze, żeby każda z nich miała wersję rtęciową, alkoholową itp.? Przydałoby ci się trochę logiki i ścisłości. Właśnie tego, jeśli chcesz wiedzieć, można się nauczyć na studiach...

Wyglądało na to, że dobrze poczuł szpilę.

– A może użyć termopary? – zaproponował po chwili jakby nigdy nic. – Otrzymuje się napięcie proporcjonalne do różnicy temperatur, więc...

– Nic z tego. Ta proporcjonalność to jest prawo przybliżone, słuszne na ogół tylko w niezbyt dużym przedziale temperatur. Poza tym termopary też można konstruować z różnych metali...

Zapadła dłuższa cisza. Żeby uratować swój honor, Maciek koniecznie musiał coś sobie przypomnieć...

– Czekaj, czekaj. Ja chyba już wiem, dokąd ty zmierzasz. Trzeba wziąć zamiast cieczy – gaz doskonały. Coś takiego było w podręczniku, ale ani rusz nie mogłem wtedy zrozumieć, po co się to wprowadza. Taki termometr jest przecież zupełnie niepraktyczny... Aha, przecież wszystkie gazy rozrzedzone można uważać za gaz doskonały, więc rozszerzają się tak samo! Hura! I jeszcze... temperatura gazu doskonałego jest proporcjonalna do energii kinetycznej jego cząsteczek. Nie powiesz chyba, że energia kinetyczna nie jest wielkością dobrze określoną!

– Bardzo dobrze – przyznałem – W dodatku termometr z gazem doskonałym wskazuje od razu temperaturę w skali fizycznej – Kelvina. W zerze absolutnym objętość gazu spadłaby do zera. Jest to całkiem dobra definicja temperatury, ale... mnie niezupełnie odpowiada.

– Dlaczego?

– Bo jednak opiera się na własnościach jednej wyróżnionej substancji – gazu doskonałego. Jest to może i ważny przypadek, ale kto wie, czy nie istnieją inne ciała, równie proste, które rozszerzałyby się inaczej? Najlepiej byłoby mieć taką konstrukcję termometru, która nie zależałaby od własności żadnej konkretnej substancji.

– To jest chyba niemożliwe!

– A nie znasz takiego prawa fizycznego, które miałoby jednakową postać dla wszystkich ciał, i wiązałoby się jakoś z temperaturą?

Maciek wyglądał na skołowanego, najwyraźniej nic takiego nie przychodziło mu do głowy.

– A druga zasada termodynamiki i silnik Carnota? – przypomniałem.

– Aha, że sprawność cyklu Carnota jest maksymalną sprawnością silnika cieplnego...

– Nie tylko o to chodzi. Istotne jest przede wszystkim to, że sprawność silnika Carnota zależy tylko od temperatury grzejnika T_1 i chłodnicy T_2 i jest taka sama dla wszystkich substancji.

– A to właściwie skąd wiadomo?

– Bo gdyby jeden silnik, pobierając od grzejnika tyle samo ciepła co drugi, zamieniał więcej go na pracę, to ten drugi silnik można by puścić w przeciwną stronę (pamiętaj, że silnik Carnota pracuje w sposób odwracalny). Wtedy grzejnik nie pobierałby w sumie ani nie oddawał żadnego ciepła, a chłodnica oddawałaby więcej drugiemu, niż pobierałaby od pierwszego. Układ pobierałby więc ciepło tylko od chłodnicy, zamieniając je w całości na pracę, co jest sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki.

– I w jaki sposób na tej podstawie można skonstruować termometr?

– Bardzo prosto. Trzeba wybrać sobie pewną temperaturę odniesienia, która wyznaczy wielkość skali. Na przykład może to być punkt zamarzania wody, i jeśli się mu przypisze 273 stopnie, to otrzyma się skalę Kelvina. Następnie dla dowolnego innego punktu na skali określamy temperaturę przez silnik Carnota, którego grzejnik będzie utrzymywany w temperaturze mierzonej, a chłodnica – w temperaturze odniesienia (albo na odwrót). Pomiar temperatury odbywa się poprzez pomiar sprawności silnika, według wzoru

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

– I to ma być „bardzo prosto”? Ty chyba żartujesz! Zanim puścisz w ruch silnik Carnota, zanim zmierzysz jego sprawność... Cały dzień byś stracił na wykonanie jednego pomiaru!

– Ależ ja wcale nie mówię, że tak ma wyglądać praktyczny termometr! To jest tylko ogólna zasada wyznaczania skali. Istnieją zresztą metody matematyczne, które pozwalają ją „przetłumaczyć” na bardziej praktyczny język zależnie od typu termometru. Na przykład temperatura wyznaczona termometrem gazowym okazuje się taka sama, jak wyznaczona silnikiem Carnota.

– Wszystko jedno, mnie się wydaje, że to bardzo dziwaczna definicja – zakończył Maciek sceptycznie.

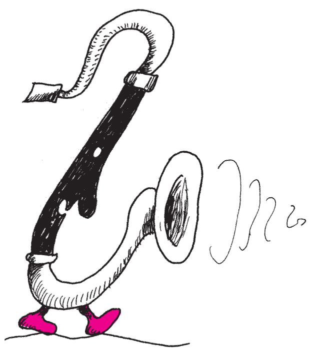
A co Wy o tym sądzicie?

Jerzy B. BROJAN

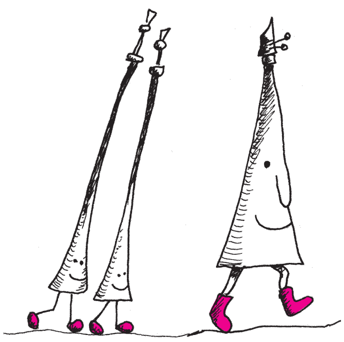
Lata świetlne czy metry?

Chyba najpopularniejszą astronomiczną jednostką odległości jest rok świetlny. Co prawda z obserwacji teleturniejów wiadomo, że według niektórych jest to jednostka czasu, ale... spuśćmy kurtynę – nie wszyscy w szkole przepadali za astronomią. W każdym razie jest to odległość przebywana przez światło w ciągu roku, a więc wynosi tyle, co prędkość światła (3×10^8 m/s) razy długość roku ($3{,}15 \times 10^7$ s), czyli w przybliżeniu 10^{16} m. Jest to odległość ogromna, a jednak stanowiąca dopiero 1/4 odległości Słońca od najbliższej gwiazdy.

Na obszarze Układu Słonecznego jednostka ta jest kompletnie niepraktyczna. Zresztą kilometr też. Zajrzawszy do dowolnych tablic astronomicznych, łatwo przekonujemy się, że odległości międzyplanetarne to miliony czy miliardy kilometrów i zarazem bardzo drobne ułamki roku świetlnego. Dlatego dawno już wymyślono jednostkę odległości praktyczną w Układzie Słonecznym. Ona się nawet tak nazywa: **jednostka astronomiczna** (1 j.a.), i oznacza **średnią odległość Ziemi od Słońca**. Zamiast więc mówić, że Ziemia obiega Słońce w odległości 150 mln km, mówi się, obiega w odległości 1 (domyślnie: jednej jednostki astronomicznej). Tak się też szczęśliwie składa, że po przeliczeniu na „czas świetlny" odległość ta również wyraża się liczbą możliwą do ogarnięcia wyobraźnią. Mianowicie 150 mln km po podzieleniu przez prędkość światła daje prawie dokładnie 500 s, czyli 8,3 min. Tyle czasu światło leci od Słońca do Ziemi. Od Księżyca do Ziemi trochę ponad sekundę, a na przebycie średnicy samego Słońca potrzebowałoby ponad 4 sekund.



Można teraz pobawić się w przeliczanie odległości planet z jednostek astronomicznych na minuty. W gruncie rzeczy nic ciekawego z tego nie wyniknie, warto jednak zapamiętać, jak wielka jest w tych jednostkach orbita najodleglejszej planety, Plutona. To, że Pluton obiega Słońce w odległości (średniej) niemal 6 mld km, jest oczywiście prawdą, ale liczba taka nikomu chyba nic nie mówi. Natomiast powiedzenie, że jest to 40 j.a., albo 5,5 godzin świetlnych, daje od razu pojęcie o skali odległości w Układzie Słonecznym. A nawet odległości międzygwiazdowych, bo – jak wspomnieliśmy – od najbliższej gwiazdy światło leci ponad 4 lata.

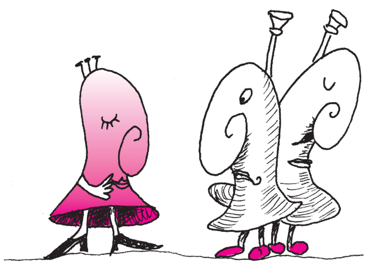


Używanie „zręcznych" jednostek jest nie tylko zabawą lub sposobem na poglądowe przedstawienie jakiegoś zagadnienia, lecz stanowi również ułatwienie obliczeń. Na przykład trzecie prawo Keplera zapisane w jednostkach fizycznych mówi, że okres obiegu planety T i półoś jej orbity a związane są zależnością:

$$T^2/a^3 \approx 4\pi^2/(\mathrm{G}M),$$

gdzie G jest stałą grawitacji, a M masą Słońca, podczas gdy wyraziwszy rozmiary orbit planet w jednostkach astronomicznych, a okresy obiegu w latach, mamy po prostu

$$T^2 = a^3.$$

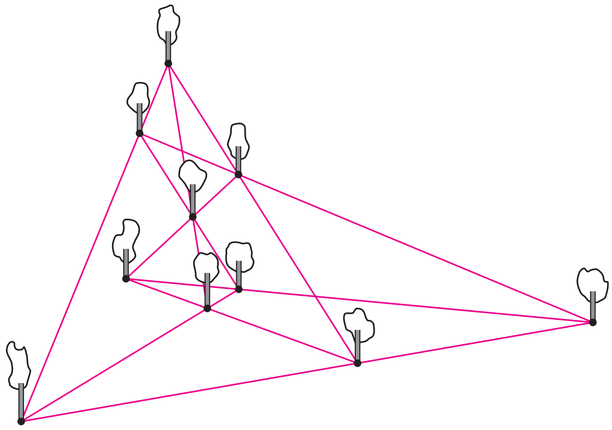


Przy poważnych numerycznych obliczeniach ruchu planet, z uwzględnieniem oddziaływania każdej planety z każdą inną, zachodzi potrzeba korzystania miliony razy ze wzoru na siłę wzajemnego oddziaływania planet, warto więc, dla oszczędności czasu komputerowego, by wzór ten miał możliwie najprostszą postać. A to właśnie osiąga się, prowadząc obliczenia w najodpowiedniejszych dla danego zagadnienia jednostkach.

T. K.

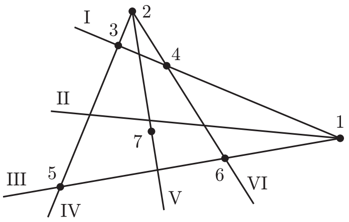
Oszczędny ogrodnik

Ile co najmniej trzeba mieć drzew, aby posadzić je po trzy w dziesięciu rzędach? Ten, który prymitywnie myśli, że trzydzieści, myli się. Wystarcza w zupełności 10 drzew. Zamieszczone obok rozwiązanie zostało wymyślone przez architekta krajobrazu, doradcę kardynała Richelieu, Girarda Desarguesa (czyt. dezarga). Powstaje w sposób naturalny kilka pytań. Na ile dowolnie rozmieszczone są te rzędy? Jaki pożytek matematyczny można mieć z rozwiązania tego ogrodniczego problemu? Jak się przekonać, że rozwiązanie nie jest „naciągnięte", że nie jest to sugestywna niedokładność rysunku? Wypada na to odpowiedzieć.

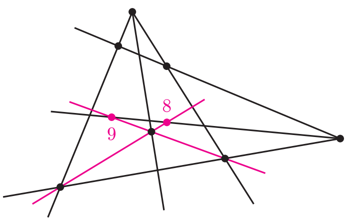


Jak powstaje konfiguracja Desarguesa

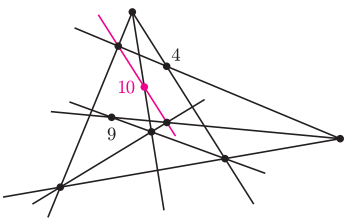
Rysujemy dwie trójki prostych I – VI i zaznaczamy na nich punkty 1 – 7 (ten ostatni dość dowolnie na V).



Prowadzimy proste 5-7 i 6-7; w przecięciu z II otrzymujemy punkty 8 i 9.



Prowadzimy prostą 3-8 i w przecięciu z V otrzymujemy punkt 10.



Jeżeli punkty 4, 9 i 10 leżą na jednej prostej, to Desargues miał rację. Przeprowadźcie precyzyjny eksperyment.

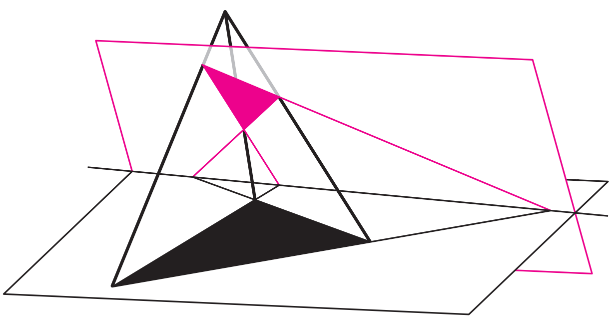
Na marginesie narysowana jest historyjka obrazkowa, która mówi, jak dalece dowolnie można narysować konfigurację Desarguesa i wskazuje, co mianowicie należy dowodzić, aby stwierdzić, że taka konfiguracja istnieje. Po prostu trzeba wykazać, że otrzymane na końcu trzy punkty, z których każdy leży na dwóch narysowanych prostych (inne leżą już na trzech!), leżą na wspólnej prostej. Fakt, że tak jest, nazywa się twierdzeniem Desarguesa. Proponuję Czytelnikom, aby inaczej zaczęli rysować konfigurację Desarguesa – inaczej, to znaczy tak, aby ostatnią rysowaną prostą była kolejno każda z nich. Tyle o dowolności.

Pożytek matematyczny z twierdzenia Desarguesa nazywa się geometrią rzutową – wielu uważa, że od tego się zaczęło. Ale nie każdy wie, co to takiego jest geometria rzutowa – jeśli jednak lubi rozwiązywać zadania, to zobaczy, że za pomocą tego twierdzenia można rozwiązać ciekawe zadania. Oto dwa z nich.

Zadanie 1. Na płaszczyźnie dane są dwie proste k i l o niedostępnym (lub nieistniejącym – nie wiemy) punkcie przecięcia. Dany jest także pewien punkt P nieleżący na żadnej z nich. Należy samą linijką skonstruować prostą przechodzącą przez punkt P i przez punkt przecięcia prostych k i l (lub równoległą do nich).

Zadanie 2. Trzy półproste a, b i c o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na kąty rozwarte. We wnętrzu każdego z tych kątów dany jest punkt, odpowiednio A, B, C. Należy samą linijką skonstruować trójkąt o wierzchołkach na tych półprostych, którego boki przechodzą przez punkty A, B i C.

Oczywiście, nie podamy tu rozwiązań – zepsulibyśmy całą przyjemność. Dla porządku jednak znajdują się one w numerze.



No i dowód. Zamiast niego zauważmy, że na rysunek konfiguracji Desarguesa można popatrzeć tak: jest to czworościan przecięty płaszczyzną. Na rysunku jest zatem pięć płaszczyzn. Wszystkie interesujące nas proste są przecięciami jakiejś pary z nich. Np. prosta II z rysunku na marginesie to przecięcie płaszczyzny podstawy z płaszczyzną tnącą.

M. K.

Twierdzenie Szarkowskiego

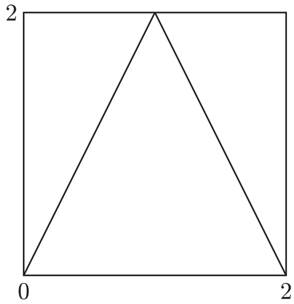
Weźmy funkcję $f(x):[0,2]\to[0,2]$ o wykresie jak na rysunku 1 i utwórzmy ciąg $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ według następującego przepisu

$$a_1 = f(a_0),\ a_2 = f(a_1),\ a_3 = f(a_2),\ \ldots$$

Czy można znaleźć takie a_0, żeby nasz ciąg był stały? Aby tak było, wystarczy, żeby zachodziła równość

$$(*) \qquad f(a_0) = a_0.$$

Rzeczywiście, wtedy $a_1 = f(a_0) = a_0$, $a_2 = f(a_1) = f(f(a_0)) = f(a_0) = a_0$, itd. Sprawdźmy zatem, czy równość $(*)$ zachodzi dla jakiegoś a_0. Rozwiązujemy równanie $x = 2x$ z warunkiem $x \in [0,1]$ oraz $x = 4-2x$ z warunkiem $x \in (1,2]$. Pierwsze z tych równań ma, oczywiście, rozwiązanie $x_1 = 0$, a drugie $x_2 = 4/3$. Zatem jedyne ciągi stałe, jakie możemy otrzymać z naszej funkcji f zgodnie z przepisem, to ciągi: $4/3, 4/3, 4/3, 4/3, 4/3, \ldots$ oraz $0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

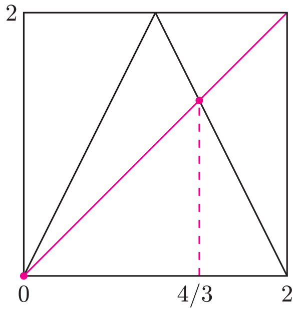


Rys. 1. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0,1] \\ 4-2x & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$

A czy można tak dobrać a_0, by uzyskać ciąg postaci $A, B, A, B, A, B, \ldots$ dla pewnych różnych liczb A i B? Zauważmy, że aby tak się stało, konieczne jest, by – po pierwsze – nie zachodziła równość $(*)$, bo wtedy ciąg byłby stały. Ponadto musimy mieć $f(a_0) = a_1$ i $f(a_1) = a_0$, czyli po prostu

$$(**) \qquad f(f(a_0)) = a_0.$$

Czy taką liczbę da się znaleźć? Cóż, musimy teraz rozwiązać równanie $g(x) = x$ dla funkcji $g(x) = f(f(x))$. Pozostawimy Czytelnikowi sprawdzenie, że funkcja $g(x)$ ma wykres jak na rysunku 3. Nietrudno wyliczyć, że rozwiązaniem równania $g(x) = x$ są liczby $x_1 = 4/5$ oraz $x_2 = 8/5$. Biorąc więc np. $a_0 = 4/5$, uzyskujemy ciąg $4/5, 8/5, 4/5, 8/5, 4/5, 8/5, \ldots$

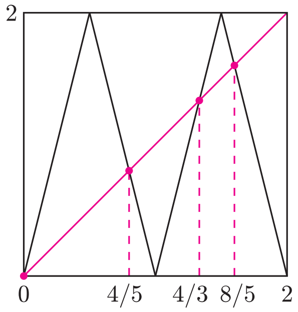


Rys. 2

Skoro nam tak świetnie idzie, to spytajmy teraz, czy da się dobrać a_0 tak, by uzyskać ciąg postaci $A, B, C, A, B, C, A, B, C, \ldots$ dla różnych liczb A, B i C. Jasne, że teraz nie chcemy, by zachodziły równości $(*)$ i $(**)$, natomiast żądamy, aby zachodziła równość

$$(***) \qquad f(f(f(x))) = x.$$

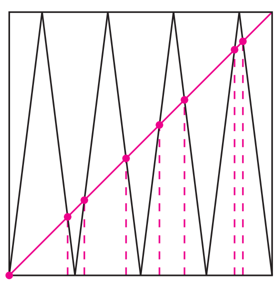
Musimy zatem rozwiązać równanie $h(x) = x$ dla funkcji $h(x) = f(f(f(x)))$, której wykres przedstawia rysunek 4. Rozwiązań równania $(***)$ jest, jak widać, osiem, dwa to oczywiście 0 i 4/3. Pozostałe nietrudno obliczyć, my zdradzimy tylko, że jednym z nich jest $x = 4/9$, który po podstawieniu w miejsce a_0 daje ciąg $4/9, 8/9, 16/9, 4/9, 8/9, 16/9, 4/9, 8/9, 16/9, \ldots$



Rys. 3.

$$g(x) = \begin{cases} 4x & \text{dla } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 4-4x & \text{dla } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ 4x-4 & \text{dla } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ 8-4x & \text{dla } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$

Czytelnik, który z rezygnacją spodziewa się, że padnie teraz pytanie o istnienie ciągu postaci $A, B, C, D, A, B, C, D, A, B, C, D, \ldots$, nie powinien popadać w rozpacz. Nie będziemy już rysować wykresów kolejnych złożeń funkcji f ani przeprowadzać żadnych nużących rachunków. Chroni nas przed tym słynne **twierdzenie Szarkowskiego**, które, w najprostszej wersji, mówi, że *jeśli funkcja $f(x)$ z odcinka $[a,b]$ na odcinek $[a,b]$ jest ciągła i generuje (w opisany wyżej sposób) ciąg postaci $A, B, C, A, B, C, A, B, C, \ldots$, to generować musi już dla dowolnej liczby n ciąg postaci $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, gdzie wszystkie liczby $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ są różne.*



Rys. 4

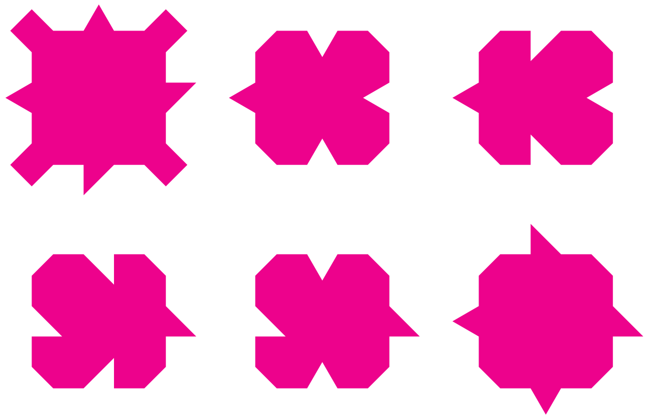
Na koniec pozostaje zachęcić tych z Czytelników, którzy znają nieśmiertelny wzór „be kwadrat minus cztery a ce" do zmierzenia się z funkcją $s(x) = 4x(1-x)$ określoną na odcinku $[0,1]$. Czy generując ciągi w opisany wyżej sposób, otrzymamy m.in. ciąg postaci $A, B, C, A, B, C, \ldots$, a tym samym – zgodnie z twierdzeniem Szarkowskiego – ciągi o powtarzającym się okresowo dowolnie długim bloku różnych liczb?

W. S.

Kafelki Robinsona

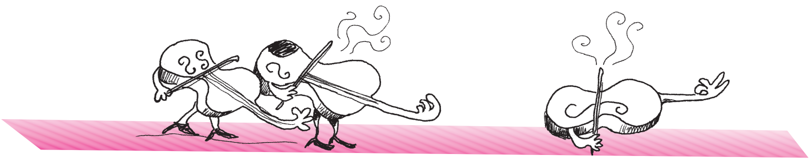
Jest w matematyce grupa twierdzeń, które już ze względu na swoją budowę wróżą trudności w ich dowodzeniu. To twierdzenia, że czegoś zrobić się nie da. Na przykład, że nie można podać ogólnych wzorów na pierwiastki równań stopnia większego od 4. Albo że dla liczby całkowitej $n > 2$ nie ma liczb całkowitych dodatnich a, b, c spełniających równanie $a^n + b^n = c^n$. Albo że nie ma algorytmu wskazującego w skończonej liczbie kroków wszystkie całkowite rozwiązania równania algebraicznego o całkowitych współczynnikach. Albo że ze standardowych aksjomatów teorii mnogości nie można wyprowadzić możliwości takiego uporządkowania elementów dowolnego zbioru, by każda jego niepusta część miała element najmniejszy.

Przykładów można by mnożyć wiele, ale są wśród nich i takie, z którymi warto samemu się zmierzyć. Oto sześć kafelków wymyślonych w 1971 roku przez Raphaela Robinsona. Okazuje się, że – dysponując dowolnie wielkimi zapasami tych kafelków – można szczelnie i bez nakrywań pokryć nimi całą płaszczyznę.



Ale miało przecież być o tym, że czegoś nie da się zrobić. Otóż nie da się tego zrobić w sposób okresowy. Co to znaczy? Wyobraźmy sobie, że zaznaczyliśmy na płaszczyźnie wszystkie linie, wzdłuż których stykają się kafelki, i wykonaliśmy kopię powstałej siatki na przezroczystej folii. Otóż pokrycie jest okresowe, gdy można tak przesunąć folię, aby wszystkie linie siatki znów się nałożyły. Bardzo polecamy ćwiczenia w pokrywaniu płaszczyzny takimi kafelkami (trzeba wykonać sobie z tekturki ich spory zapas), jak też próbę zastanowienia się nad dowodem, że takie pokrycie nie może być okresowe.

M. K.



Co to znaczy białe?

Właśnie, czy białe światło zawsze jest takie samo? Wszyscy chyba wiemy, że nie. Wrażenie białości odbieramy wtedy, gdy wszystkie trzy wrażliwe na kolor receptory naszych oczu są pobudzane tak, jakby były pobudzane przez „naprawdę białe” światło, czyli ciągłe widmo o natężeniu niezależnym od częstości. Te trzy receptory reagują najsilniej na światło: jeden na czerwone, drugi na zielone, trzeci na niebieskie. W takim razie można wywołać wrażenie bieli za pomocą światła składającego się z trzech dyskretnych składowych, zamiast z ciągłego widma. Nie pozostaje nam nic innego, jak zbadać, które źródła białego światła są „naprawdę białe”, a które tylko „białe udają”.

W tym celu należy światło rozszczepić. Można użyć pryzmatu, ale dzisiaj o wiele łatwiej o siatkę dyfrakcyjną – wystarczy wziąć byle jaką (ale nagraną) płytę kompaktową. Te kolorowe refleksy to nic innego, jak dyfrakcja światła. Żeby jednak sprawdzić, czy mamy do czynienia z ciągłym, czy też z dyskretnym widmem, należy badane światło przepuścić przez jakąś szczelinę tak, aby obrazy poszczególnych części źródła nie zachodziły na siebie.

Proponuję zbadać zwykłą żarówkę (kontrolnie), a następnie energooszczędne świetlówki, ekran monitora itd. Które z tych źródeł okaże się dyskretne i czym będą się różnić? Warto sprawdzić. Czy jednak „nieprawdziwość” białego światła w czymś przeszkadza? Niektórym tak, choć zazwyczaj nie potrafią wytłumaczyć dlaczego.

A jeżeli już jesteśmy przy przeszkadzaniu, to warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół. Światło może migać. To też łatwo sprawdzić. Wystarczy szybko machać np. długopisem na tle ekranu komputera. Długopis będzie widać w miejscach, które odpowiadają świeceniu źródła. Jeżeli macie taką możliwość, to porównajcie telewizor, dobry monitor i monitor ciekłokrystaliczny. Nie zaszkodzi też przyjrzeć się różnym świetlówkom. Powodzenia.

P. Z.

Do przemyślenia na plaży i nie tylko

Jak zmieni się ciśnienie atmosferyczne, jeśli wyparuje woda ze wszystkich oceanów?

Dodatkowe ciśnienie pary wodnej Δp jest równe ciśnieniu warstwy wody, która wzięłaby się z pokrycia całej powierzchni Ziemi warstwą wody z oceanów o stałej grubości. Średnia głębokość oceanów wynosi $H \approx 4$ km, można założyć, że zajmują one 2/3 powierzchni Ziemi. Zatem $\Delta p \sim \frac{2}{3}\rho g H \approx 3 \cdot 10^7$ Pa, czyli ciśnienie wzrosłoby ponad 100 razy.

Z jaką minimalną prędkością można jechać na nartach wodnych?

Jadąc na nartach wodnych, można się utrzymać na powierzchni wody, jeśli siła ciężkości, działająca na poruszającego się na nich człowieka, równa jest pionowej składowej siły działania wody na narty. Jest ona proporcjonalna do $\rho V^2 S \cos\alpha \sin\alpha$, gdzie S – powierzchnia nart, a α to kąt nachylenia nart do horyzontu. Pomijając siłę wyporu, dla $m = 80$ kg i $S = 0{,}4$ m^2 otrzymujemy: $\rho v^2 S \cos\alpha \sin\alpha \sim mg$, $v \sim \sqrt{2mg/\rho S} \approx 2$ m/s.

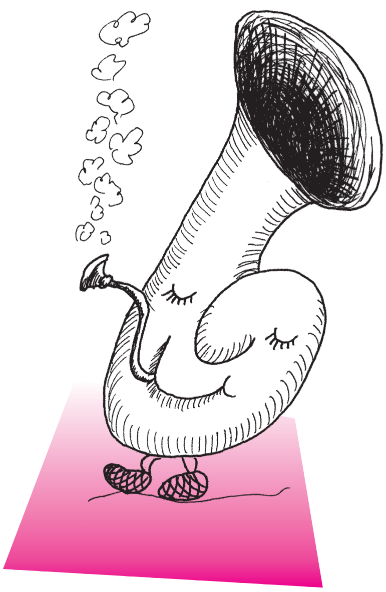
Jakiej głębokości dołek utworzy się pod śmigłowcem ratowniczym, który zawisł na niewielkiej wysokości nad wodą daleko od brzegu?

Ze względu na panującą równowagę powietrze działa od dołu na śmigłowiec siłą skierowaną w górę i równą sile ciężkości działającej na śmigłowiec. Warstwa powietrza między śmigłowcem a wodą przy niezbyt dużej wysokości z taką samą siłą działa na wodę, tworząc zagłębienie. Zatem śmigłowiec wypchnie taką masę wody, jaką ma on sam (powietrze między nim a wodą odgrywa rolę elementu przenoszącego siłę i może być pominięte w rozważaniach). Przyjmując masę śmigłowca równą $m \approx 10^4$ kg, długość śmigieł $l \approx 5$ m, otrzymujemy głębokość dziury równą w przybliżeniu $h \sim m/\rho\pi l^2 \approx 0{,}1$ m.

Jaką moc rozwija kolarz na finiszu?

Przyjmijmy, że prędkość rowerzysty na finiszu wynosi v, a siła oporu powietrza $F \sim \rho v^2 S$, gdzie ρ to gęstość powietrza, a S – efektywne pole powierzchni kolarza, na które pada prąd powietrza. Stąd moc $P \approx Fv \approx \rho v^3 S$. Przyjmując $\rho \approx 1$ kg/m^3, $v \approx 60$ km/h, $S \approx 0{,}5$ m^2, otrzymujemy $P \approx 2$ kW.

Jakie jest naprężenie łańcucha rowerowego w czasie jazdy pod górę?



Porównajmy moment sił: $Fr \sim mg \cdot 2r$, gdzie r to promień koła zębatego, $2r$ – odległość pedału od osi tego koła, mg – siła ciężkości działająca na człowieka równa maksymalnej sile nacisku na pedał. Dla $m \approx 70$ kg otrzymujemy $F \sim 2mg \approx 1{,}4 \cdot 10^3$ N.

W jakiej odległości od obserwatora człowiek w jaskrawym ubraniu, uciekający przez las (bez poszycia), przestaje być widoczny?

Niech d oznacza średni promień pnia drzew, a l – średnią odległość między drzewami. Dokonajmy pewnego eksperymentu myślowego i rozmieśćmy drzewa tak, żeby tworzyły ścisłą palisadę w kształcie okręgu o promieniu równym szukanej odległości x z obserwatorem w jego środku. Za taką palisadą nawet człowiek w jaskrawym ubraniu nie będzie widoczny. W ogrodzeniu długości $2\pi x$ jest więc $2\pi x/d$ drzew, które zostały wzięte z obszaru o powierzchni πx^2. Jeśli na obszar $S \sim l^2$ przypada średnio jedno drzewo, to na powierzchni πx^2 będzie ich $\pi x^2/l^2$. Zatem $2\pi x/d \approx \pi x^2/l^2$, skąd, przyjmując $l \approx 3$ m i $d \approx 0{,}2$ m, dostajemy $x \approx 2l^2/d \approx 10^2$ m.

E. Cz.