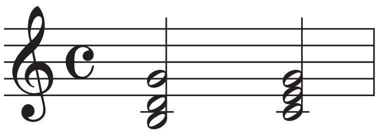
Dalsze wariacje na melodię „Tnijmy graniastosłup”

Michał SZUREK

1. Cantabile. Co to jest tak zwane „dobre zadanie”? To tak, jak dobry temat muzyczny: powinno łatwo wpadać w ucho, mieć prostą konstrukcję, nieskomplikowaną fabułę, dostarczać skojarzeń, dopuszczać możliwości transkrypcji, przeróbek i uogólnień, sugerować możliwości dalszego rozwijania tematu i – jak w muzyce – dawać się interesująco rozwiązać. Nieznającym się na muzyce powiem, że „rozwiązanie” akordu polega na przejściu od jednego do drugiego, z dysonansu na konsonans. Akord buduje pewne napięcie, rozwiązanie akordu rozładowuje to napięcie. Słyszymy dokładnie to, co intuicyjnie chcielibyśmy usłyszeć. Dokładnie tak, jak w matematyce: zadanie buduje pewne napięcie, rozwiązanie rozładowuje je, a takie „rozwiązanie”, jakie dokonuje się w sali porodowej, też rozładowuje napięcie. Interesujące, że w różnych językach słowo „rozwiązanie” kojarzy się też z czym innym. Po polsku rozwiązujemy węzeł, ale angielskie „solve” to to samo, co „rozpuść”. Po rosyjsku „reszenije” to także „postanowienie”, po niemiecku równania rozwiązuje się tak, jakby się kupowało bilet (die Gleichung lösen, die Fahrkarte lösen).



Rozwiązanie akordu dominantowego na toniczny.

W świetle tych rozważań nasze zadanie o graniastosłupie jest bardzo dobre. Zaskakujące jest to, że występują w nim rzadko spotykane w geometrii wyższe potęgi. Przeformułujmy lekko tezę.

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego $2n$-kątnego, tworząc w przekroju wielokąt wypukły $D_1D_2\ldots D_{2n}$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to dla wykładników $k = 0, 1, \ldots, n-1$ zachodzi $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i d_i^k = 0.$

2. Dolce. Słownie: suma naprzemienna jest równa zeru. Z czym Ci się to kojarzy, osłuchany Czytelniku? Oczywiście, z wzorem Eulera o wielościanach wypukłych: naprzemienna suma liczb ścian kolejnych wymiarów jest równa zeru (jeżeli dopuścimy ścianę pustą i ścianę pełną = sam wielościan). A gdzie jeszcze w matematyce mamy sumy naprzemienne? Na przykład w słynnym wzorze Eulera $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ albo w zadaniu o roztargnionej sekretarce: jeżeli n listów zostało przypadkowo włożonych do n zaadresowanych kopert, to prawdopodobieństwo tego, że choć jeden trafił do właściwej koperty, jest równe $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}$.

A więc tematowi naszego zadania należy się pewna uwaga, bo należy do zbioru standardowych wątków.

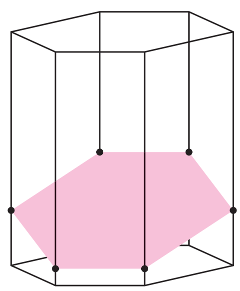
3. Andante con moto. Nie zważając na protesty antyglobalistów, posłużmy się maszyną. Pierwszy lepszy programowany kalkulator, potrafiący wykonywać rachunki symboliczne, powinien się nadać. Ja wziąłem Texas 92 … ale właśnie tylko wziąłem. Wszystko by się dało zrobić za jego pomocą, ale w Laptopie mam i edytor tekstu, i program *Mathematica*, więc łatwiej mi przerzucać się z jednego na drugi. Program wyznaczający naprzemienną sumę k-tych potęg jest banalny:

```
(* naprzemienna suma poteg na gslupie n-katnym *)
gslup[n_, k_, x_, y_, z_] := Simplify[x^k - y^k + z^k + Sum[
    (-1)^j*(Simplify
       [
          Solve[
          Det[{{1,1,0,x},{1,Cos[2Pi/n],Sin[2Pi/n],y},
              {1,Cos[4*Pi/n],Sin[4*Pi/n],z},
              {1,Cos[2j*Pi/n],Sin[2j*Pi/n],h}}] == 0,h]]
       [[1,1,2]
    ])^k,
  {j,3,n-1}]]
```

i będziemy się nim podpierać.

4. Piano. Najpierw spróbujmy zanalizować ostatnie słowa tekstu Zbigniewa Marciniaka, że dla $k \geqslant n/2$ wartość sumy naprzemiennej $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i d_i^k$ zależy od położenia płaszczyzny tnącej. No, to zbadajmy, jak zależy.

Nazwijmy przekrojem krawędziowym przekrój taki, jak na rysunku poniżej: dwa przeciwległe boki przekroju są równoległe do podstawy. Wtedy (nie tylko w graniastosłupie sześciokątnym) owa suma jest zero…, bo (wyrażając się nieco kolokwialnie) wszystko się równo układa i te same liczby się kasują…



Badamy zatem naprzemienną sumę k-tych potęg odległości wierzchołków równoległoboku, który jest przekrojem, od podstawy. Oznaczmy wartość tej sumy przez $g(n,k)$. Zacznijmy od $n = 4$ (prostopadłościan). Zamieńmy d_1, d_2, d_3 na x, y, z. Funkcja $g(n,k)$ zależy więc od trzech zmiennych x, y, z.

Naciśnięcie klawisza Enter daje

$$g(4,k) = x^k - y^k + z^k - (x - y + z)^k.$$

To ciekawa funkcja. Będziemy ją rozpatrywać w obszarze

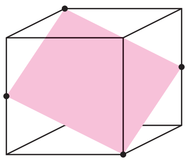
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant z \leqslant h,$$

gdzie h jest wysokością prostopadłościanu. Przypominam bowiem o założeniu, że podstawa jest wielokątem foremnym wpisanym w koło o promieniu 1. Możemy też zakładać, że pierwszy wierzchołek przekroju leży „najniżej” (ściślej: nie wyżej niż inne). Wyznaczymy wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w tym obszarze.

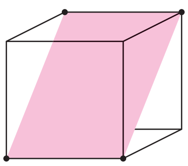
Funkcja potęgowa (dla wykładników $k > 1$) jest wypukła: odcinek łączący punkty jej wykresu leży zawsze nad krzywą. Jeżeli zatem $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$, to
$$y^k + (x - y + z)^k \leqslant (x + z)^k \leqslant x^k + z^k,$$
a więc $g(4, k) \geqslant 0$. Mamy zatem proste, ale ładne twierdzenie.

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne prostopadłościanu, tworząc w przekroju równoległobok $D_1D_2D_3D_4$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa (przy czym D_1 jest wierzchołkiem najbliższym podstawy), to dla dowolnego wykładnika $k > 1$ jest $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i d_i^k \geqslant 0.$

Wyznaczmy wartość największą funkcji
$$g(4, k) = x^k - y^k + z^k - (x - y + z)^k.$$
Obliczamy pochodne cząstkowe:
$$\frac{\partial g}{\partial x} = kx^{k-1} - k(x - y + z)^{k-1},$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -ky^{k-1} + k(x - y + z)^{k-1},$$
$$\frac{\partial g}{\partial z} = kz^{k-1} - k(x - y + z)^{k-1}$$
i przyrównujemy je do zera. Ponieważ x, y, z, a także $x - y + z$ są liczbami dodatnimi, więc niezależnie od wykładnika wszystkie trzy pochodne cząstkowe mogą być równe zeru, tylko gdy $x = y = z$. Nasza funkcja nie ma ekstremów wewnątrz obszaru, w którym ją badamy. Pozostaje zbadać jej przebieg na brzegu obszaru $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant z \leqslant h$, co ominiemy, a tylko podamy wynik: wartość największa tej funkcji jest przyjmowana dla parametrów $x = 0, y = h/2, z = h$. Odpowiada to przekrojowi, który moglibyśmy nazwać *wierzchołkowym.*



Ten przekrój maksymalizuje naprzemienną sumę k-tych potęg odległości wierzchołków od podstawy.



Taki przekrój minimalizuje naprzemienną sumę k-tych potęg odległości wierzchołków od podstawy. Oczywiście, dla przekroju „poziomego” ta suma jest też zerem.

Możemy teraz „wygenerować” kilka ciekawych zadań, choćby i takie:

Zadanie 1. Wyznaczyć kąty rombu, który jest przekrojem maksymalizującym naprzemienną sumę k-tych potęg odległości wierzchołków od podstawy.

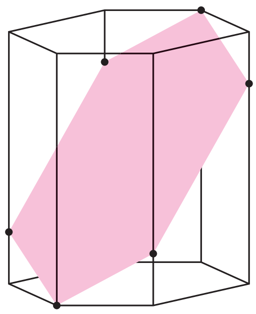
Zadanie 2. Wyznaczyć rozmiary prostopadłościanu, dla którego ten romb ma kąty 45°, 135°.

5. Allegro con brio. Z wykładu fizyki na IV roku studiów zapamiętałem powiedzenie profesora: „fizyk nie zabiera się do obliczeń, jeśli nie zna odpowiedzi”. A Thomas Edison mawiał: „Po co myśleć? Ekperymentuj”. Zachowajmy się i my w ten sposób. Szukamy przekroju graniastosłupa sześciokątnego, który maksymalizuje naprzemienną sumę sześcianów odległości wierzchołków od podstawy. Przyjmijmy na początek, że wysokość graniastosłupa jest równa 1. Podzielmy każdą z krawędzi na 100 części i poprowadźmy milion płaszczyzn. Wiele z nich (Czytelniku: ile?) przecina tylko powierzchnię boczną graniastosłupa (a nie podstawy) – tak, jak jest w warunkach naszego zadania. Sprawdzamy, który daje największą naprzemienną sumę sześcianów. Mózg elektroniczny potrzebuje na odpowiedź kilkanaście sekund:

```
h=1; m=0;
 For[i=0, i⩽100,
  For[j=i, j⩽100,
   For[k=j, k⩽100, d1=i*h/100;
   d2=j*h/100, d3=k*h/100;
   d4=d1 - 2d2 + 2d3;
   d5=2d1 - 3d2 + 2d3;
   d6=2d1 - 2d2 + d3;
   g=d1^3 - d2^3 + d3^3 - d4^3 + d5^3 - d6^3;
   If[0⩽d4⩽h && 0⩽d5⩽h && 0⩽d6⩽h && g>m,
    m=g; d1max=d1; d2max=d2; d3max=d3; d4max=d4;
    d5max=d5; d6max=d6]; k++]; j++]; i++];
 Print[d1max, ", ", d2max, ", ", d3max, ", ", d4max, ", ",
      d5max, ", ", d6max, ", ", N[m]]
```

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0.1875$$

Otrzymane liczby znaczą tyle: przekrój maksymalizujący przechodzi przez przeciwległe wierzchołki obu podstaw i „tnie po równo”, jedna czwarta wysokości od góry i od dołu.



Taki przekrój wierzchołkowy maksymalizuje naprzemienną sumę k-tych potęg. Dwa wierzchołki wielokąta znajdują się w przeciwległych wierzchołkach graniastosłupa, a wychodzące z tych wierzchołków boki mają równe długości.

6. Mormorando. Skoro wiemy już, jaka jest odpowiedź, postarajmy się ją udowodnić. Ale… właściwie po co? Przecież nie mamy żadnej wątpliwości, że odpowiedź jest dobra. Możemy sprawdzić – i to jest ciekawe – że jest to przekrój maksymalizujący sumę dowolnych potęg.

Mamy tu do czynienia z interesującym pytaniem. Już teraz matematycy muszą sobie na nie odpowiadać. Czy dopuszczać dowody komputerowe i, co gorsza, czy dopuszczać takie metody obliczeniowe, które wprawdzie przekonują nas na 100%, że coś jest prawdą… ale nie są dowodami? Pozornie sprawa jest prosta: metody takie, jak zaprezentowane tu przeze mnie sprawdzenie, nie stanowią dowodu matematycznego, więc należy je odrzucić. Ale to znaczy, że sami ograniczamy siebie, nie dopuszczając pewnego rodzaju niezbitych argumentów.

A tak na marginesie, matematyczny dowód faktu, że przekrój maksymalizujący naprzemienną sumę k-tych potęg dla dowolnego graniastosłupa prawidłowego o parzystej liczbie boków podstawy) można nietrudno przeprowadzić tak:

1. sprawdzamy, że przesunięcie płaszczyzny tnącej wzdłuż osi „pionowej” nie zmienia wartości sumy naprzemiennej k-tych potęg, zatem można zakładać, że najniższy wierzchołek leży na dolnej podstawie;

2. sprawdzamy, że jeżeli dolna podstawa graniastosłupa leży na płaszczyźnie $z = 0$ i wszystkie wierzchołki przekroju są „poniżej” górnej podstawy, to biorąc zamiast płaszczyzny tnącej jej obraz w przekształceniu $(x, y, z) \rightarrow \rightarrow (x, y, az)$, $a > 1$, otrzymujemy przekrój o większej naprzemiennej sumie, zatem można zakładać, że najniższy wierzchołek leży na dolnej podstawie, a najwyższy na górnej;

3. sprawdzamy, że jeżeli przekrój nie jest „równoramienny”, to nie maksymalizuje naszej naprzemiennej sumy: w tym celu obracamy lekko płaszczyznę tnącą wokół osi przechodzącej przez wierzchołki leżące na górnej i dolnej podstawie. Jest tu trochę rachunków, ale komputer jest cierpliwy…

Numerujmy wierzchołki tak, by zerowy był najniższy. A oto zadanie dla Czytelników: czy owa „naprzemienna suma k-tych potęg” jest zawsze nieujemna (tak, jak dla prostopadłościanu)? Autor umie to „sprawdzić” komputerowo…

A oto kilka innych funkcji $g(n, k)$:

$$g(6, 4) = -24(x - y)(y - z)(x - 2y + z)(x - y + z),$$

$$g(6, 5) = -10(x - y)(y - z)(x - 2y + z)\times$$
$$\times(7x^2 - 15xy + 9y^2 + 13xz - 15yz + 7z^2),$$

$$g(8, 4) = \frac{(-4x^2+3\sqrt{2}x^2-xy+y^2+9xz-6\sqrt{2}xz-yz-4z^2+3\sqrt{2}z^2)}{(1-\sqrt{2})^4}\times$$
$$\times 4(x - y)(y - z).$$

Mamy co badać, prawda? Powodzenia.

7. Forte. Znaleźliśmy wiele ciekawych zależności. Jakie jeszcze można znaleźć? A czy można wyznaczyć wszystkie? Popróbujmy. Zadanie stanie się prostsze, gdy sformułujemy je w języku geometrii algebraicznej. Czytelnikom polecamy rozwiązanie zadania w przypadku $n = 4$ (prostopadłościan), a my przeprowadzimy dyskusję dla graniastosłupa o podstawie sześciokątnej. Wyliczyliśmy, że gdy sześciokąt podstawy jest wpisany w koło o promieniu 1 o środku $(0, 0)$, a jednym z wierzchołków sześciokąta jest punkt $(1, 0)$ i gdy trzy kolejne odległości, o których mowa w zadaniu, oznaczymy przez d_1, d_2, d_3, to trzy następne są równe

$$d_4 = d_1 - 2d_2 + 2d_3,$$
$$d_5 = 2d_1 - 3d_2 + 2d_3,$$
$$d_6 = 2d_1 - 2d_2 + d_3.$$

Wynika stąd, na przykład, że

$$d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + d_5 - d_6 = 0,$$

wystarczy dodać.

Zapomnijmy na chwilę, że d_1, d_2, d_3 są odległościami punktów od płaszczyzny i potraktujmy je jako zmienne. Określmy odwzorowanie przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ w sześciowymiarową $\mathbb{R}^6$ wzorem

$$(d_1, d_2, d_3) \rightarrow (d_1, d_2, d_3, d_3 - 2d_2 + 2d_3,$$
$$2d_1 - 3d_2 + 2d_3, 2d_1 - 2d_2 + d_3).$$

Jest to przekształcenie różnowartościowe i zanurza ono $\mathbb{R}^3$ jako pewną płaską przestrzeń H w $\mathbb{R}^6$. Ponieważ $6 - 3 = 3$, więc H jest opisane układem trzech równań liniowych sześciu zmiennych. Oznaczając współrzędne w $\mathbb{R}^6$ przez $x_1, x_2, \ldots, x_6$, mamy trzy oczywiste zależności, spełnione przez wszystkie punkty przestrzeni H:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,$$
$$-2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 0,$$
$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 0.$$

A to znaczy, że każda relacja algebraiczna między $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ pochodzi od trzech podstawowych:

$$r_1 = -d_1 + 2d_2 - 2d_3 + d_4;$$
$$r_2 = -2d_1 + 3d_2 - 2d_3 + d_5;$$
$$r_3 = -2d_1 + 2d_2 - d_3 + d6.$$

Dla przykładu, wykażemy, jak zależy od r_1, r_2, r_3 suma naprzemienna kwadratów odległości. Obliczmy:

$$r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 = (-d_1 + 2d_2 - 2d_3 + d4)^2-$$
$$-(-2d_1 + 3d_2 - 2d_3 + d_5)^2 + (-2d_1 + 2d_2 - d_3 + d_6)^2 =$$
$$= d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - 2d_1d_4 + 4d_2d_4 - 4d_3d_4 + d_4^2 + 4d_1d_5-$$
$$-6d_2d_5 + 4d_3d_5 - d_5^2 - 4d_1d_6 + 4d_2d_6 - 2d_3d_6 + d_6^2 =$$
$$= d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + d_6^2 + (-2d_1 + 4d_2 - 4d_3)d_4+$$
$$(-4d_4 + 4d_5 - 2d_6)d_5 + (-4d_1 + 4d_2 - 2d_3)d_6 =$$
$$= d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + d_6^2.$$

To, co robiliśmy tutaj, czyli wyznaczanie wszystkich relacji między zmiennymi na podanym zbiorze, jest typowym zadaniem geometrii algebraicznej. Bywa na ogół bardzo trudne, ale u nas równania nie były skomplikowane.

7. Brawa, okrzyki „bis”. Ten tekst pisałem długo, za długo w stosunku do powagi zadania. Ale i tak został mi pewien niedosyt, między innymi spowodowany tym, że moje maszynki poddają się przy bardziej skomplikowanych kosinusach. Co jeszcze można ciekawego zobaczyć w graniastosłupie przecinanym płaszczyzną?