Zadania o szklanych kulach

Lev KOURLIANDTCHIK

Szklana kula, zrzucona swobodnie z pewnego piętra n-piętrowego wieżowca, może się stłuc. Zależy to nie od kuli, lecz od wysokości. Dysponujemy k takimi kulami. Należy ustalić minimalną liczbę prób, które trzeba wykonać, zrzucając kule z pięter tego wieżowca, aby wykryć numer najwyższego piętra, po zrzuceniu z którego kula nie stłucze się.

Oznaczmy przez $f(n,k)$ żądaną liczbę prób. Jest oczywiste, że $f(n,1)=n$. Spróbujmy znaleźć $f(n,2)$. Oczywiście zachodzą równości:

$$f(1,2)=1,\ \ f(2,2)=2,\ \ f(3,2)=2,$$
$$f(4,2)=3,\ \ f(5,2)=3,\ \ f(6,2)=3.$$

Zanim przystąpimy do poszukiwania ogólnego wzoru na $f(n,2)$, postarajmy się obliczyć jakąś konkretną jej wartość, na przykład $f(100,2)$.

Pierwsze, co przychodzi do głowy, to próbować kolejno testować piętra o numerach $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$. Prowadzi to do 19 prób. Ale czy rzeczywiście trzeba ich aż tyle?

Spróbujmy podejść do rozwiązania tego zadania bardziej rozważnie.

Niech k będzie najmniejszą liczbą niezbędnych rzutów kul. Jest oczywiste, że pierwszą próbę trzeba przeprowadzić z piętra o numerze k. Drugą zaś próbę przeprowadzamy z piętra o numerze $k+(k-1)=2k-1$, trzecią z piętra o numerze $k+(k-1)+(k-2)=3k-3$ i tak dalej. Próba o numerze k odbędzie się z piętra o numerze

$$k+(k-1)+\ldots+1=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Zatem $\dfrac{k(k+1)}{2}\geqslant 100$. Stąd $k=14$ i otrzymujemy, że $f(100,2)=14$.

Rzuty należy przeprowadzać kolejno z następujących pięter:

$$14,\ 27,\ 39,\ 50,\ 60,\ 69,\ 77,\ 84,\ 90,\ 95,\ 99,\ 100.$$

Teraz już wiadomo, jak rozwiązać zadanie w przypadku ogólnym dla dwóch kul. Niech $f(n,2)=k$. Wtedy

$$\frac{k(k+1)}{2}\geqslant n.$$

Stąd

$$k\geqslant\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}.$$

Oznaczmy przez $\lceil x\rceil$ najmniejszą liczbę całkowitą, która jest nie mniejsza niż x. Mamy

$$f(n,2)=\left\lceil\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right\rceil.$$

Teraz zajmiemy się znalezieniem wzoru na $f(n,3)$. Łatwo jest znaleźć kilka początkowych wartości:

$$f(1,3)=1,\ f(2,3)=2,\ f(3,3)=2,\ f(4,3)=3,$$
$$f(5,3)=3,\ f(6,3)=3,\ f(7,3)=3,\ f(8,3)=4.$$

Spróbujmy obliczyć $f(100,3)$. Oznaczmy tę liczbę przez k. Jest oczywiste, że pierwszą próbę należy przeprowadzić z piętra o numerze

$$\frac{(k-1)k}{2}+1.$$

Drugą próbę należy przeprowadzić z piętra o numerze

$$\frac{(k-1)k}{2}+1+\frac{(k-2)(k-1)}{2}+1.$$

Trzecią próbę przeprowadzamy z piętra o numerze

$$\frac{(k-1)k}{2}+1+\frac{(k-2)(k-1)}{2}+1+\frac{(k-3)(k-2)}{2}+1$$

i tak dalej. Próbę o numerze k przeprowadzamy z piętra o numerze

$$\frac{(k-1)k}{2}+1+\frac{(k-2)(k-1)}{2}+1+\ldots+\frac{1\cdot 2}{2}+1+1=$$
$$=\frac{1}{2}\Big((k-1)k+(k-2)(k-1)+\ldots+1\cdot 2\Big)+k=$$
$$=\frac{1}{2}\Big((k-1)^2+(k-1)+(k-2)^2+(k-2)+\ldots$$
$$\ldots+1^2+1\Big)+k=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+\frac{(k-1)k}{2}\right)+k=$$
$$=\frac{(k-1)k(2k-1)+3(k-1)k+12k}{12}=$$
$$=\frac{k(2k^2-3k+1+3k-3+12)}{12}=$$
$$=\frac{k(2k^2+10)}{12}=\frac{k(k^2+5)}{6}.$$

A więc

$$\frac{k(k^2+5)}{6}\leqslant 100.$$

Stąd $k=9$ i $f(100,3)=9$.

Oznacza to, że rzuty należy przeprowadzać kolejno z następujących pięter:

$$37, 66, 88, 100.$$

Teraz już wiemy, jak rozwiązać zadanie w przypadku ogólnym dla trzech kul. Jeśli $f(n,3)=k$, to

$$\frac{k(k^2+5)}{6}\geqslant n.$$

Tak, na przykład, $f(2003,3)=23$.

Mam nadzieje, że Czytelnik już zrozumiał, w jaki sposób należy podchodzić do rozwiązania zadania w przypadku ogólnym.

Na koniec proponuję Czytelnikowi, aby samodzielnie obliczył $f(2003,4)$.