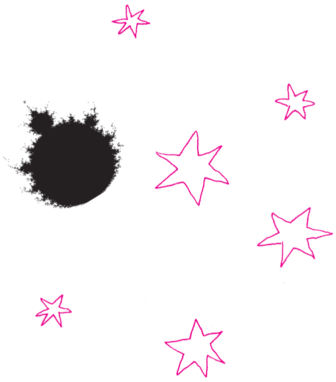
Termodynamika czarnych dziur

Ewa CZUCHRY



Czarne dziury to obiekty powstające przy analizie pola grawitacyjnego w ogólnej teorii względności. Są to obszary czasoprzestrzeni, w których pole grawitacyjne jest tak silne, że żadne ciało fizyczne, nawet światło, nie może się wydostać poza ten obszar. Jednym z najbardziej ciekawych aspektów teorii czarnych dziur jest analogia między prawami fizyki czarnych dziur a zwykłymi prawami termodynamiki. Prawa fizyki czarnych dziur są otrzymywane na drodze ścisłych matematycznych rozważań, prawa termodynamiki zaś są tylko makroskopowymi przybliżeniami skomplikowanych praw fizyki mikroskopowej, obowiązującymi w układach o dużej ilości cząstek. Istnieje jednak pewna matematyczna analogia między prawami fizyki czarnych dziur a prawami termodynamiki, analogia, która może sięgać głębiej niż formalne podobieństwa wzorów matematycznych i prowadzić do pewnych fizycznych wniosków.

Zacznijmy trochę od środka. W 1971 r., na gruncie rozważań opartych na ogólnej teorii względności, zostało sformułowane pewne prawo dotyczące mechaniki czarnych dziur:

W dowolnym procesie fizycznym całkowite pole powierzchni A wszystkich czarnych dziur we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta A \geqslant 0$.

To prawo bardzo przypomina drugie prawo termodynamiki, które mówi, że w dowolnym procesie fizycznym całkowita entropia S całej materii we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta S \geqslant 0$.

Ta analogia może się wydawać bardzo sztuczna. „Twierdzenie o powierzchni” jest ścisłą matematyczną konsekwencją ogólnej teorii względności, natomiast II zasadę termodynamiki uważa się nie za ścisłą konsekwencję praw natury, lecz raczej prawo, które zachodzi w pewnym przybliżeniu w układach o dużej liczbie stopni swobody. Można jednak pokazać, że ta analogia między mechaniką czarnych dziur a II zasadą termodynamiki rozciąga się też na inne prawa termodynamiki.

Przypomnijmy najpierw znane, np. ze szkoły, prawa termodynamiki:

0. W ciele znajdującym się w stanie równowagi termodynamicznej temperatura T jest stała.
1. Zmiana energii wewnętrznej E: $\Delta E = T\Delta S + \Delta W$, gdzie ΔW jest pracą wykonaną nad układem, np. przez zmianę objętości $\Delta W = p\Delta V$.
2. W dowolnym procesie fizycznym całkowita entropia S całej materii we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta S \geqslant 0$
3. Nie można osiągnąć temperatury $T = 0$ w procesie fizycznym. (Alternatywne sformułowanie: przy temperaturze T dążącej do 0 entropia układu dąży do 0.)

Porównajmy teraz te prawa z prawami mechaniki czarnych dziur. Przed ich sformułowaniem wprowadźmy jeszcze pewną wielkość, która ma bardzo duże znaczenie w opisie czarnych dziur. Jest to tzw. grawitacja powierzchniowa, czyli granica wartości siły, która z nieskończoności utrzymuje jednostkową masę próbną w miejscu. Granica wartości tej funkcji na horyzoncie czarnej dziury to właśnie grawitacja powierzchniowa κ, przy czym *horyzont* to powierzchnia graniczna czarnej dziury, po przekroczeniu której żadne ciało fizyczne nie może się już wydostać na zewnątrz.

Prawa fizyki czarnych dziur są następujące:

0. Grawitacja powierzchniowa κ jest stała na horyzoncie stacjonarnej czarnej dziury.

Z pewnych technicznych rozważań dla ogólnych obracających się czarnych dziur wynika zależność:

1. $\Delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\Delta A + \Omega\Delta J$, gdzie M oznacza masę czarnej dziury, A – pole powierzchni horyzontu, Ω to prędkość kątowa, a J to moment pędu czarnej dziury.

Formuła ta jest analogiczna do I prawa termodynamiki. Człon $\Omega\Delta J$ odpowiada członowi $p\Delta V$, co więcej, dla jakiegokolwiek obracającego się ciała w jego formule termodynamicznej pojawia się właśnie wyrażenie $\Omega\Delta J$. W powyższym prawie fizyki czarnych dziur ΔA występuje podobnie jak ΔS w I prawie termodynamiki, tylko tutaj jest mnożone przez $(1/8\pi)\kappa$, a nie przez T – zatem grawitację powierzchniową κ można interpretować jako temperaturę czarnej dziury. Już zerowe prawa termodynamiki i czarnych dziur wskazują na tę analogię.

2. W dowolnym procesie fizycznym całkowite pole powierzchni A wszystkich czarnych dziur we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta A \geqslant 0$.
3. Z analizy ogólnego przypadku obracających się czarnych dziur wynika, że niemożliwe jest osiągnięcie wartości $\kappa = 0$ na drodze fizycznego procesu. Im bardziej się zbliżamy do tego konkretnego rozwiązania, tym trudniej zrobić następny krok, podobnie jak przy próbie

realizacji $T = 0$. (Alternatywne sformułowanie III prawa termodynamiki: „$S \to 0$, gdy $T \to 0$”, nie jest spełnione w fizyce czarnych dziur, ponieważ A może nie dążyć do zera.)

Zatem pewnego rodzaju analogicznymi wielkościami są energia wewnętrzna i masa: $E \leftrightarrow M$, temperatura i grawitacja powierzchniowa: $T \leftrightarrow \alpha\kappa$ oraz entropia i pole powierzchni horyzontu: $S \leftrightarrow (1/8\pi\alpha)A$, gdzie α jest jakąś stałą. Zwróćmy jednak uwagę na podobne role odgrywane przez energię wewnętrzną E i masę M. Jest to pewnego rodzaju wskazówka, że związek między prawami czarnych dziur i prawami termodynamiki to więcej niż analogia wzorów matematycznych, co wynika z tego, że E i M nie pełnią tylko analogicznej roli we wzorach, ale reprezentują tę samą wielkość fizyczną – energię.

Jest tylko pewien problem. W klasycznej teorii grawitacji temperatura czarnej dziury jest równa 0, ponieważ czarna dziura pochłania wszystko, ale nic nie emituje. Może stąd wynikać, że κ nie może fizycznie reprezentować temperatury. Jednakże w 1974 roku S. Hawking odkrył, że kwantowa kreacja par cząstek wirtualnych powoduje emisję z czarnej dziury cząstek o widmie ciała doskonale czarnego. Zgodnie z fizyką kwantową i zasadą nieoznaczoności, w próżni mogą spontanicznie pojawiać się na chwilę pary cząstek: cząstka i antycząstka. Ponieważ energia nie może powstawać z niczego, jedna cząstka z tej pary musi mieć energię dodatnią, a druga ujemną. Przypuśćmy, że taka para, np. elektron–pozyton, powstała w pobliżu horyzontu czarnej dziury, a jedna z tych cząstek, o ujemnej energii, dostała się pod horyzont. Stąd już nie może się wydostać, a więc nie może nastąpić anihilacja jej z antycząstką. Na zewnątrz czarnej dziury zostaje więc cząstka pozostała z wygenerowanej spontanicznie pary, i jest to cząstka rzeczywista, o dodatniej energii. Zatem czarna dziura promieniuje. Widmo tego promieniowania jest widmem ciała doskonale czarnego o temperaturze $T = \frac{\hbar}{2\pi}\kappa$. Zatem κ, a dokładnie $\kappa/2\pi$ fizycznie reprezentuje temperaturę termodynamiczną czarnej dziury!

Pozostaje pytanie, czy istnieje fizyczny związek między S i $\frac{1}{4}A$ (stała proporcjonalności $\alpha = 1/2\pi$ wynika z rozważań na temat temperatury i grawitacji powierzchniowej). A dokładniej: czy $\frac{1}{4}A$ fizycznie reprezentuje entropię czarnej dziury?

Zgodnie z II prawem termodynamiki całkowita entropia Wszechświata nigdy nie maleje. Jednak gdy mamy do czynienia z czarną dziurą, możemy chcieć się ograniczyć tylko do materii na zewnątrz horyzontu, o tym, co dzieje się wewnątrz, nic nie wiemy, poza tym wszystko jest „zjadane” przez osobliwość w środku czarnej dziury. Łatwo jednak sprawić, żeby entropia materii na zewnątrz czarnej dziury malała, np. wrzucając część materii do czarnej dziury. Z drugiej strony „twierdzenie o powierzchni” mówi, że powierzchnia horyzontu A nigdy nie maleje. Jednak w związku ze wspomnianym już promieniowaniem Hawkinga, gdy czarna dziura emituje powstałe w wyniku spontanicznej kreacji cząstki, niosące pewną energię, i absorbuje cząstki o energii ujemnej, jej całkowita energia maleje, aż do całkowitego „wyparowania”, powodując zmniejszenie się powierzchni do zera. Zatem w obecności czarnej dziury i ze względu na efekty kwantowe, zarówno II prawo termodynamiki, jak i „twierdzenie o powierzchni” są łamane.

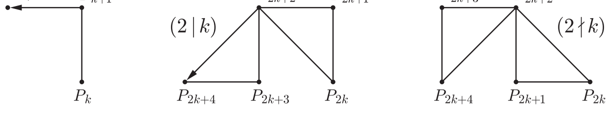
Jednak w procesach, w których $\Delta S < 0$ w związku ze spadaniem materii na czarną dziurę, powierzchnia czarnej dziury zwiększa się: $\Delta A > 0$. I analogicznie, w procesach „parowania”, gdy $\Delta A < 0$, entropia materii na zewnątrz czarnej dziury rośnie: $\Delta S > 0$, w związku z emisją promieniowania. Można więc zdefiniować *uogólnioną* entropię:

$$S' = S + \frac{1}{4}A.$$

Widzimy, że zmniejszaniu się S towarzyszy wzrost A, a zmniejszaniu się A wzrost S. Sugeruje to, że w dowolnym procesie fizycznym musi obowiązywać uogólnione prawo: $\Delta S' \geqslant 0$. Prawo to ma bardzo naturalną i prostą interpretację. Jest to nic innego niż zwykłe II prawo termodynamiki zastosowane do układu zawierającego czarną dziurę, przyjąwszy, że entropia czarnej dziury jest równa $\frac{1}{4}A$.

Zatem analogia między prawami termodynamiki a prawami fizyki czarnych dziur przestaje być po prostu analogią. Prawa fizyki czarnych dziur są niczym więcej jak prawami termodynamiki zastosowanymi do układu materia i czarna dziura. Niejasny pozostaje tylko fizyczny mechanizm tego, że $\frac{1}{4}A$ jest entropią czarnej dziury. Oczekuje się, że zostanie to wyjaśnione przez kwantową teorię grawitacji.

Rozwiązanie zadania M 1031.
Niech S będzie obrotem o 45° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Wykażemy, że

$$(*) \qquad \overrightarrow{P_{2k}P_{2(k+1)}} = \sqrt{2}\cdot S(\overrightarrow{P_kP_{k+1}}).$$

Mamy $P_2 = (1,1)$, więc wzór $(*)$ zgadza się dla $k = 0$. Rozważmy przypadek $a_{k+1} = 1$. Wówczas $a_{2(k+1)} = 1$. Rysunek obok uzasadnia krok indukcyjny w tym przypadku. Przypadek $a_{k+1} = -1$ jest symetryczny. Z równości $(*)$ otrzymujemy

$$\overrightarrow{P_{16k}P_{16(k+1)}} = 16\cdot \underbrace{S\circ S\circ\ldots\circ S}_{8\text{ razy}}(\overrightarrow{P_kP_{k+1}}) = 16\cdot\overrightarrow{P_kP_{k+1}}\,.$$