Pochodna motywacji osiągnięć

Marcin STERKOWIEC

Interesują Cię bardziej praktyczne zastosowania matematyki niż podziwianie piękna i kunsztu dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata? Jeśli tak, wygląda na to, że powinnaś/powinieneś wybrać studia psychologiczne. Jeszcze chyba nigdy różne dziedziny nauk nie przenikały się tak mocno. Psychologowie muszą znać tajniki statystyki, ekonomiści (dziedzina tradycyjnie zdominowana przez metody matematyczne) zagłębiają się w prace psychologów Amosa Tversky'ego i Daniela Kahnemana (tylko ten ostatni żył na tyle długo, by móc w ubiegłym roku odebrać Nagrodę Nobla z ekonomii). Prowadzi się coraz więcej badań interdyscyplinarnych. Poniżej przedstawiam teoretyczny model Atkinsona (1964), który zajmował się badaniem potrzeby osiągnięć, oraz jego empiryczną weryfikację, którą przeprowadził wraz z Litwinem (1960).

Jak pokazują daty obu prac, mamy tu do czynienia z przypadkiem, kiedy obserwacje empiryczne poprzedzają modelowe uogólnienia. Jednakże bardzo płodne może okazać się również podejście odwrotne: model teoretyczny i weryfikacja empiryczna tego modelu.

Model wydaje się bardzo prosty, ale płynące zeń wnioski, jak sądzę, mogą zadziwić niejednego naukowca.

Mimo że wyniki naszego działania silnie zależą od nas samych (zaangażowania, wytrwałości, pracowitości, uporu, koncentracji itp.), jednakże często są też obarczone pewną dozą niepewności. Oznaczmy więc symbolem P_S prawdopodobieństwo sukcesu w pewnym zadaniu (przy założeniu, że sami dołożyliśmy wszelkich starań, aby sukces ten rzeczywiście nastąpił). Tak więc zadanie, dla którego P_S wynosi np. 0,8, możemy określić jako dość łatwe; jeśli $P_S = 0{,}2$ – mamy do czynienia z zadaniem dość trudnym, a $P_S = 0{,}5$ oznacza zadanie o średnim poziomie trudności. Jeśli odniesiemy sukces, jego miarę wyrazić możemy wielkością $1 - P_S$ (im mniejsze jego prawdopodobieństwo, tym większy sukces), jeśli zaś doznamy porażki, jej miarą jest wielkość $-P_S$ (im bardziej prawdopodobny sukces, tym bardziej dotkliwa porażka).

Jest to założenie modelu, jednakże trzeba zdać sobie sprawę, że być może powinniśmy mierzyć wielkość sukcesu funkcją nieliniową względem prawdopodobieństwa sukcesu.

Jakie zadania i wyzwania wybieramy? Innymi słowy, jakie wybieramy P_S? Takie pytanie postawił sobie Atkinson i przyjął, że nasze zachowanie zależy w takich sytuacjach od następujących czynników:

- motyw osiągnięcia sukcesu (M_S), tj. jak bardzo zależy nam na sukcesie,
- motyw unikania porażki (M_P), tj. jak bardzo boimy się niepowodzenia,
- wielkość sukcesu ($1 - P_S$),
- wielkość niepowodzenia ($-P_S$).

Teraz możemy określić subiektywnie odczuwaną wielkość sukcesu jako $M_S(1 - P_S)$ oraz subiektywnie odczuwaną wielkość porażki jako $-M_P P_S$. Rezultat naszego działania R możemy więc postrzegać jako dyskretną zmienną losową o następującym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$R = \begin{cases} M_S(1 - P_S) & \text{z prawdopodobieństwem } P_S \\ -M_P P_S & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - P_S. \end{cases}$$

Wartość oczekiwana powyższej zmiennej losowej, którą możemy interpretować jako chęć do działania, wynosi więc:

$$\mathrm{E}R = P_S M_S(1 - P_S) + (1 - P_S)(-M_P P_S) =$$
$$= P_S(1 - P_S)(M_S - M_P).$$

Z powyższego wyrażenia można bezpośrednio wyciągnąć ciekawe wnioski, jednakże potrzebujemy jeszcze dodatkowego, choć dość rozsądnego założenia, że w naszym zachowaniu staramy się maksymalizować wartość oczekiwaną rezultatu działania.

Wiele badań z psychologii ekonomicznej pokazuje, że w analogicznych sytuacjach związanych z niepewnością ludzie wcale nie zachowują się tak racjonalnie. Aby modele lepiej pasowały do rzeczywistości stosowane bywają operacje takie jak ważenie prawdopodobieństw. Z tego też powodu np. funkcja użyteczności von Neumana–Morgensterna, dotycząca wyboru w warunkach niepewności, jest uznawana za normatywną, a lepiej przybliżają rzeczywistość modele takie, jak teoria perspektywy Kahnemana i Tversky'ego czy teoria oczekiwanej użyteczności zależnej od pozycji (rank-dependent expected utility) Quiggina.

Co ciekawe, chęć do działania (dodatnia) będzie przejawiana tylko u osób, u których silniejszy jest motyw osiągania sukcesu niż motyw unikania porażki ($M_S - M_P$). Dlatego też na razie zajmijmy się tylko tymi osobami, u których $M_S > M_P$.

Teraz możemy przejść do odpowiedzi na zasadnicze pytanie, które postawił sobie Atkinson: jak trudne zadania wybieramy? Wartość oczekiwana rezultatu działania $\mathrm{E}R$, pomijając parametry związane z konkretną osobowością człowieka, jest funkcją tylko jednej zmiennej – prawdopodobieństwa sukcesu P_S. A zatem odszukamy maksimum ciągłej i różniczkowalnej funkcji $\mathrm{E}R(P_S)$ z dziedziną $P_S = [0{,}1]$, znajdując punkt zerowy pochodnej względem P_S. Nie jest to zadanie trudne; z własności pochodnej wiemy, że

$$(\mathrm{E}R)' = (1 - 2P_S)(M_S - M_P),$$

a zatem $(\mathrm{E}R)' = 0$ gdy $P_S = 0{,}5$. Nie trzeba nikogo przekonywać, że parabola $\mathrm{E}R(P_S)$ ma maksimum, a nie minimum czy punkt przegięcia: $(\mathrm{E}R)'' = -2(M_S - M_P)$, zatem funkcja $\mathrm{E}R$ ma w punkcie $P_S = 0{,}5$ maksimum (lokalne, jak również, w tym przypadku, globalne). Wniosek Atkinsona, nieco zaskakujący, brzmi więc następująco: **osoba, u której silniejszy jest motyw osiągania sukcesu niż motyw unikania porażki, będzie wybierała zadania o średnim poziomie trudności** ($P_S = 0{,}5$).

Wróćmy teraz do osób, u których silniejszy jest motyw unikania porażki niż motyw osiągania sukcesu ($M_S < M_P$).

W tym przypadku funkcja $\mathrm{E}R(P_S)$ jest „uśmiechniętą” parabolą, a ściślej – jej fragmentem w dziedzinie $P_S = [0{,}1]$. $\mathrm{E}R(P_S)$ osiąga więc maksimum (równe 0) na krańcach dziedziny, czyli dla $P_S^{(1)} = 0$ oraz $P_S^{(2)} = 1$. Wniosek: **osoba, u której silniejszy jest motyw unikania porażki niż motyw osiągania sukcesu będzie wybierała zadania o skrajnych poziomach trudności: albo bardzo łatwe, albo bardzo trudne.**

Badania empiryczne (np. Atkinsona i Litwina (1964)) potwierdzają przewidywania modelu. Badani studenci mieli możliwość wykonania dziesięciu rzutów obręczą z dowolnie wybranej odległości od palika. Wszyscy studenci obserwowali nawzajem swoje wyniki, co miało wzbudzać motyw osiągnięcia. Motywację osiągnięć u każdej osoby mierzono za pomocą specjalnie skonstruowanych testów. Wyniki pokazały, że osoby o wysokiej potrzebie osiągnięć i o małej obawie przed niepowodzeniem zwykle wykonywały rzuty z umiarkowanej odległości, a osoby o niskiej potrzebie osiągnięć i o wysokiej obawie przed niepowodzeniem robiły to znacznie rzadziej.

Mnie osobiście urzeka w tym modelu jego prostota, połączona z ciekawą interpretacją i nieoczywistymi wynikami. Ale czy wszystkie założenia modelu Atkinsona, dyskutowane krótko w przypisach, są poprawne? Czy stanowią akceptowalne przybliżenie rzeczywistości, czy też kryje się w nich poważny błąd? Czy model odnosi się do wszystkich sfer życia, a nie tylko rzutów z dowolnej odległości? Pozostawiam te kwestie do rozważenia Czytelnikom.

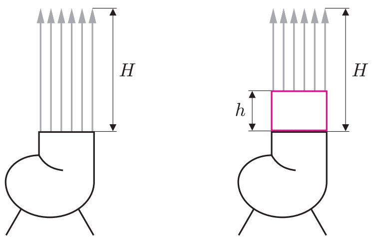
LITERATURA

Atkinson J.W. (1964), *Introduction to Motivation*: Van Nostrand, Princeton.

Atkinson J.W., Litwin G.H. (1960), *Achievement motive and test anxiety conceived as motive to approach success and motive to avoid failure*, „Journal of Abnormal and Social Psychology”, nr 60, s. 52–63.

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 599. Strumień wody w fontannie podnosi się na wysokość H nad końcem rury doprowadzającej wodę. Do tej rury podłączono dodatkową pionową rurkę o takiej samej średnicy i o wysokości $h < H$ (rysunek obok). Jak należy zmienić moc pompy, jeśli chcemy, żeby po podłączeniu dodatkowej rurki poziom, na który podniesie się woda, był taki sam?
Rozwiązanie na str. 13

F 600. Kamień o masie m jest utrzymywany w powietrzu za pomocą n strumieni wody, wychodzących pionowo z otworu o przekroju S. Prędkość wody wychodzącej z otworu wynosi v. Dochodząc do kamienia, woda rozlatuje się poziomo. Na jakiej wysokości nad otworem znajduje się kamień?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1030. Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie:
$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$
$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$
Niech $m \in \mathbb{N}$. Wykazać, że dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $m \mid a_n$.
Rozwiązanie na str. 13

M 1031. Definiujemy ciąg (a_n) następująco:
$$a_{2n} = a_n \quad \text{oraz} \quad a_{2n+1} = (-1)^n.$$
Żółw porusza się po układzie współrzędnych. Na samym początku znajduje się w punkcie $P_0 = (0,0)$, skąd udaje się do punktu $P_1 = (1,0)$. Po dotarciu do punktu P_i skręca w lewo o $90°$, jeśli $a_i = 1$ lub skręca w prawo o $90°$, jeśli $a_i = -1$. Następnie idzie naprzód jedną jednostkę. Znajduje się wtedy w punkcie P_{i+1}. Wykazać, że
$$\overrightarrow{P_{16k}P_{16(k+1)}} = 16 \cdot \overrightarrow{P_k P_{k+1}}.$$
Rozwiązanie na str. 3

M 1032. Ciąg (a_n), $n \geqslant 0$ zdefiniowany jest następująco:
$$a_n = \begin{cases} a_{n/2} & \text{gdy } 2 \mid n, \\ -a_{n-1} & \text{gdy } 2 \nmid n, \end{cases} \quad \text{oraz} \quad a_0 = 1.$$
Udowodnić, że żaden segment ciągu (a_n) nie powtarza się trzy razy z rzędu, tj. nie istnieją $k \geqslant -1$, $T \geqslant 1$, takie że
$$(a_{k+1}, \ldots, a_{k+T}) = (a_{k+T+1}, \ldots, a_{k+2T}) = (a_{k+2T+1}, \ldots, a_{k+3T}).$$
Rozwiązanie na str. 16