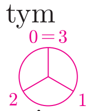
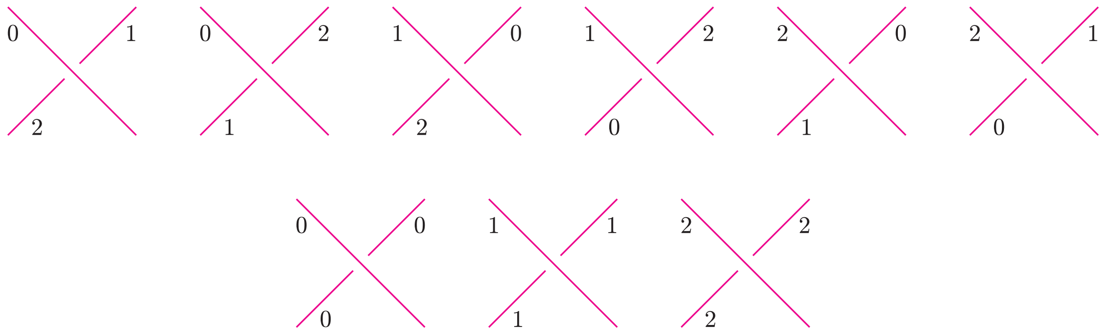
Kolorowanie splotów

– Tato, kup mi na urodziny 15-godzinny zegar – oświadczył Paweł. Widząc nasze zdziwione miny, dodał: – Wtedy lekcja w szkole będzie naprawdę trwała godzinę.
– To nie byłoby najgorzej, gdyby godziny dzienne były krótsze od nocnych – podchwycił Tomek, który sypia tylko 5–6 godzin z powodu nadmiaru prac domowych zadawanych w liceum, które zaczął w tym roku. Pawełek jednak nie to miał na myśli, bo wyjaśnił:
– W szkole rozpatrywaliśmy zegary, zaczęliśmy od 3-godzinnego,

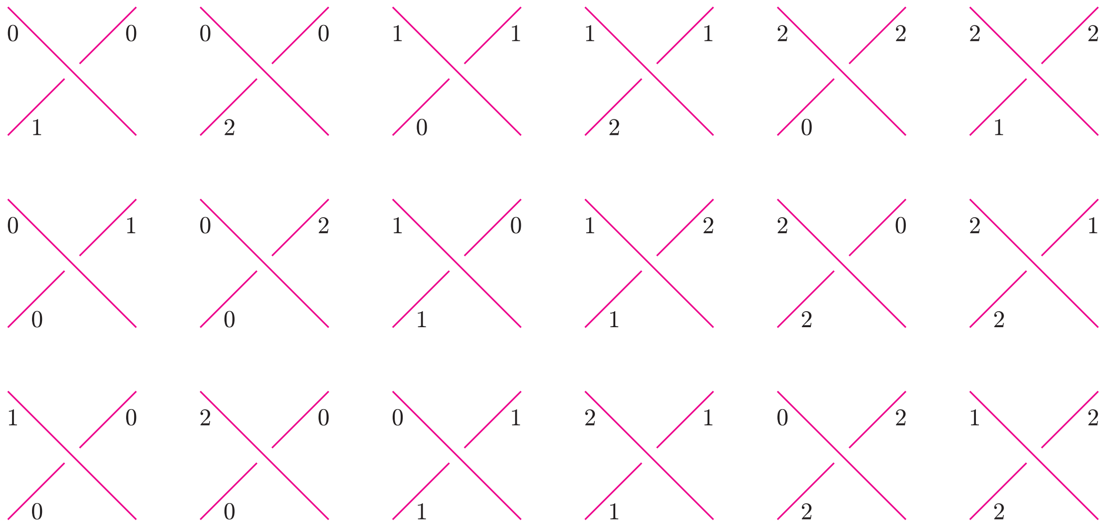


potem rysowaliśmy wielką tabelkę zegara 11-godzinnego, a następnie rozpatrywaliśmy zegar abstrakcyjny o n-godzinach, który nazwaliśmy Z_n.
– Ja wiem – przerwał Tomek – gdy wskazówka wykona obrót (po n godzinach), to wraca do wyjściowej pozycji, czyli $n = 0$ w Z_n – to tak, jakbyśmy brali resztę z dzielenia przez n – dodał.
– Właśnie tak – potwierdził Pawełek. – Czy to nie śmieszne, że $2 + 2 = 0$ w Z_4?
Tutaj wtrąciłem, że Z_n nazywa się grupą cykliczną o n elementach, zegar jest tylko ilustracją, a Z nie pochodzi od zegara, ale od niemieckiego słowa *Zahl*, które znaczy *Liczba*...
Pawełek przerwał mi.
– Wiemy, wiemy, to nudne i łatwe, a niemieckiego nie znamy, lepiej powiedz, Tata, czy tej grupy zegara można użyć do węzłów i splotów?
Nie dałem długo na siebie czekać.
– Czy wiecie, że 3-kolorowanie diagramu splotu, które dyskutowaliśmy w zeszłym roku, ma związek z zegarem 3-godzinnym?
– 3 kolory, 3 godziny, coś w tym musi być – zamyślił się Tomek. – Ale jak dodawać kolory? – dodał.
– Pewnie żółty i niebieski dadzą zielony, ale jak odejmować kolory? – szybko wtrącił Paweł.
Nie dając się sprowokować, powiedziałem do Tomka:
– Czy pamiętasz, jak definiowaliśmy 3-kolorowanie splotów? Użyj zamiast kolorów (czerwony, zielony, niebieski) liczb $0, 1, 2$, jak w zegarze Z_3.
Tomek przypominał sobie.
– Rysujemy węzeł płasko, zaznaczając w punktach przecięcia, która linia idzie górą, a która dołem.
– Zgadza się – potwiedziłem. – To nazywamy diagramem węzła czy splotu.
– Potem – ciągnął Tomek – malujemy diagram trzema kolorami, w ten sposób, że zmiana koloru może nastąpić tylko, gdy przerywamy linię (przed tunelem), ponadto w każdym skrzyżowaniu musimy mieć kolory zgodnie z jakąś regułą, ale nie pamiętam jej – dokończył.
– Reguła jest taka, że w każdym skrzyżowaniu używamy trzech różnych kolorów lub tylko jednego koloru.

Mamy więc następujące możliwości.

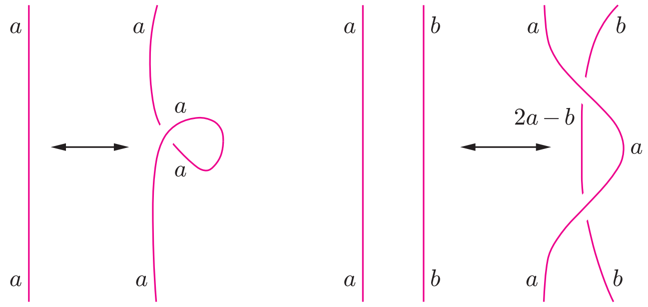


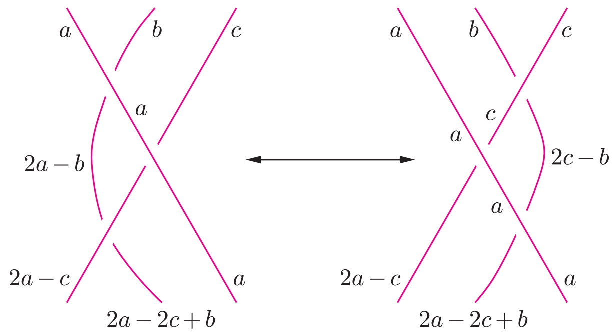
– Czy widzicie jakąś regułę? – dokończyłem. Nikt się nie odezwał.
– Dodajcie trzy liczby ze skrzyżowania – podpowiedziałem.
– Zawsze zero na zegarze – ucieszył się Paweł – oto nasza reguła!
– Sprawdźmy lepiej niedopuszczone 3-kolorowania – studził zapał Tomek.



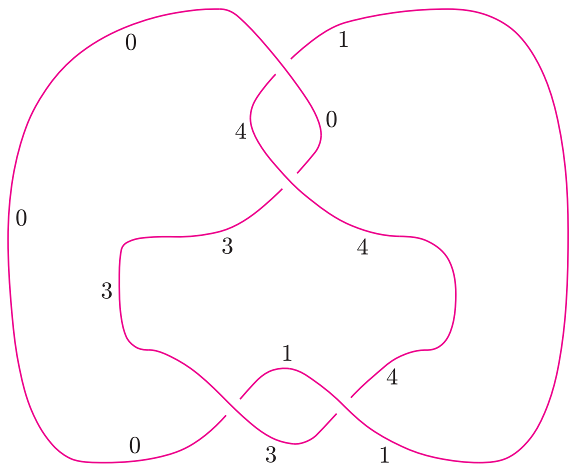
– Wychodzi zawsze 1 lub 2, nigdy 0 – Tomek był przekonany. Mamy więc następującą zasadę – podsumowałem – dopuszczamy tylko takie 3-kolorowania, które w każdym skrzyżowaniu dodają się do 0 w Z_3.
– To jaką regułę znajdziemy dla dowolnego Z_n? Czy też suma kolorów ma się równać zeru? – zaciekawił się Pawełek.
– To niemożliwe – zauważył Tomek. – Kolorowanie pętli tym samym kolorem, powiedzmy 1, dałoby $1+1+1=0$, co zachodzi tylko w Z_3.
– Świetna obserwacja – pochwaliłem. – Nasza formuła będzie miała formę $2a=b+c$ w Z_n.
– A co z Z_3? – zapytał Pawełek. – Czy zmieniliśmy reguły gry?
– Pawełku, w Z_3, $2a=-a$, czyli równość $2a=b+c$ daje to samo co $-a=b+c$ i dalej $a+b+c=0$.
– Sprytnie – powiedział Pawełek.
– Ale co właściwie będziemy sprawdzać? – Tomek miał wątpliwości.
– Kolorowania mogą chyba być różne dla różnych diagramów tego samego splotu.
– Tak – zgodziłem się – ale nie zmieni się liczba kolorowań n kolorami, choć same kolorowania mogą się zmienić. Oznaczmy liczbę n-kolorowań diagramu D przez $col_n(D)$; teraz naszą obserwację możemy precyzyjnie sformułować (za amerykańskim matematykiem R. Foxem, 1956):
Liczba n-kolorowań diagramu, $col_n(D)$, jest niezmiennikiem splotu, czyli nie zmienia się przy ruchach Reidemeistera.

Formalny dowód zostawmy Czytelnikom, nie jest on trudny, wskazówką jest rysunek.





– Poprzednim razem mówiłeś, Tata, że do pokazania, iż węzeł ósemkowy nie jest trywialny, potrzeba 5-kolorowania – przypomniał sobie Tomek – zróbmy to teraz jako ćwiczenie.
– Tomku, to jest łatwiejsze niż analiza *Wielkich nadziei* Dickensa, którą robiłeś całą ostatnią noc – wtrącił trochę ironicznie Pawełek i kontynuował:
– Trywialny węzeł ma tylko trywialne kolorowania, bo nie ma skrzyżowań, a dla węzła ósemkowego zaraz znajdziemy nietrywialne kolorowanie; oto ono – dodał po chwili bardzo ucieszony swoim sukcesem.



– Chyba nie ma w tym nic złego, że użyłem tylko czterech kolorów? – zaniepokoił się po chwili.
– To jest dozwolone, działałeś przecież w Z_5 – uspokoiłem go. – Ósemka nie jest trywialna!

Z pomocą Tomka i Pawełka przygotował Józef PRZYTYCKI