Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\int\!\!\!\!\Sigma!} = 44$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2003

Przypominamy treść zadań:

457. Na płaszczyźnie jest dany zbiór złożony z $2n$ punktów ($n \geqslant 2$), których obie współrzędne są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 1; n\rangle$. Dowieść, że pewne cztery punkty tego zbioru są wierzchołkami równoległoboku.

458. Wyznaczyć najmniejszą liczbę a, taką że nierówność
$$(1-a)\sin x + a \operatorname{tg} x > x$$
jest spełniona dla wszystkich $x \in (0; \pi/2)$.

457. Weźmy pod uwagę wszystkie proste poziome, na których leżą jakiekolwiek punkty zbioru A (rozważanego zbioru $2n$ punktów). Na każdej takiej prostej kolorujemy na pomarańczowo ten punkt zbioru A, który jest położony najbardziej na lewo; pozostałe punkty zbioru A kolorujemy na niebiesko. Jest więc co najmniej n punktów niebieskich.

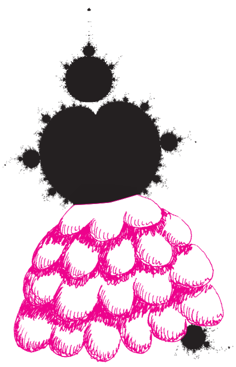
Każdemu punktowi niebieskiemu przyporządkujmy jego odległość od punktu pomarańczowego leżącego na tej samej prostej poziomej. Wartościami owych odległości są liczby całkowite ze zbioru $\{1,\ldots,n-1\}$. Istnieją więc dwa punkty niebieskie, N_1 i N_2, którym została przyporządkowana ta sama liczba. Punkty N_1 i N_2 leżą na różnych prostych poziomych. Niech P_i będzie punktem pomarańczowym leżącym na prostej poziomej przechodzącej przez punkt N_i ($i = 1,2$). Czworokąt $P_1N_1N_2P_2$ jest niezdegenerowanym równoległobokiem.

458. Dla dowolnej stałej a badamy funkcję
$$f_a(x) = (1-a)\sin x + a\operatorname{tg} x - x.$$
Obliczamy jej kolejne pochodne (i ich wartości w punkcie 0):
$$\begin{aligned}
f_a'(x) &= (1-a)\cos x + a(1+\operatorname{tg}^2 x) - 1, & f_a'(0) &= 0,\\
f_a''(x) &= (a-1)\sin x + 2a(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x), & f_a''(0) &= 0,\\
f_a'''(x) &= (a-1)\cos x + 2a(1 + 4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x), & f_a'''(0) &= 3a-1.
\end{aligned}$$

Z uzyskanych równości wynika, że jeżeli $a < 1/3$, to funkcja f_a przyjmuje w prawostronnym otoczeniu punktu 0 wartości ujemne; rozważana nierówność nie jest więc spełniona.

Niech teraz $a = 1/3$. Dla $x \in (0; \pi/2)$ zachodzą znane nierówności
$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}.$$
Wobec tego
$$f_{1/3}(x) = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} x - x > \frac{2}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - x = 0.$$

To pokazuje, że $a = 1/3$ jest najmniejszą stałą o postulowanej własności.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **449** ($WT = 1{,}58$) i **450** ($WT = 3{,}00$) z numeru 11/2002

Janusz Olszewski	– Suwałki	47,35
Tomasz Wietecha	– Tarnów	44,54
Jerzy Cisło	– Wrocław	41,81
M. Łupieżowiec	– Zebrzydowice	35,35

Znów parada Weteranów – i to jaka! Janusz Olszewski i Tomasz Wietecha kończą szóstą rundę: „podwójna norma weterańska”.

Klub 44

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2003

Przypominamy treść zadań:

354. Na końcach nieważkiego pręta o długości $2l = 2$ m zamocowane są dwa małe ciała, każde o masie m. Ile wynosi okres małych wahań tego pręta wokół pozycji pionowej, jeśli punkt zawieszenia pokrywa się ze środkiem pręta? Rozważyć dwa przypadki:
a) pole grawitacyjne jest radialne (skierowane do środka Ziemi), a jego natężenie ma jednakową wartość g w okolicy górnego i dolnego ciała,
b) pole grawitacyjne jest takie, jakby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku.

355. Chemik pozostawił w otwartym naczyniu ciekły azot, który powoli parował. Po pewnym czasie analiza wykazała, że w azocie jest domieszka tlenu. W miarę ubywania azotu procent tlenu rósł, aż ostatnia partia cieczy składała się wyłącznie z ciekłego tlenu. Na tej podstawie chemik wywnioskował, że zrealizowane zostało marzenie alchemików – wykryta została transmutacja pierwiastków. Czy to prawda? Wyjaśnić, co się stało.

354. Oznaczmy przez ε kąt odchylenia pręta od pionu. Według twierdzenia cosinusów odległości każdej z mas od środka Ziemi są równe

$$R_1 = \sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl\cos\varepsilon},$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 + l^2 + 2Rl\cos\varepsilon},$$

gdzie R – odległość od środka Ziemi do środka pręta. Zgodnie z założeniem małych drgań przybliżymy $\cos\varepsilon \approx 1 - \varepsilon^2/2$ i takie samo przybliżenie (rozwinięcie z dokładnością do wyrazów typu ε^2) zastosujemy do pierwiastka:

$$R_1 \approx R - l + \frac{Rl\varepsilon^2}{2(R-l)},$$

$$R_2 \approx R + l + \frac{Rl\varepsilon^2}{2(R+l)}.$$

W przypadku a) zmiana energii potencjalnej jest dana wyrażeniem

$$\Delta E_{\text{pot}} = m\mathrm{g}(\Delta R_1 + \Delta R_2),$$

natomiast w przypadku b) należy ją wyliczyć ze wzoru

$$\Delta E_{\text{pot}} = \frac{\mathrm{G}Mm}{(R-l)^2}\Delta R_1 + \frac{\mathrm{G}Mm}{(R+l)^2}\Delta R_2,$$

gdzie G – stała grawitacji, M – masa Ziemi. Należy tu podstawić

$$\Delta R_1 \approx \frac{Rl\varepsilon^2}{2(R-l)} \quad \text{i} \quad \Delta R_2 \approx -\frac{Rl\varepsilon^2}{2(R+l)},$$

a ponadto uprościć wzory, korzystając z warunku $R \gg l$.
Otrzymujemy w przypadku a) przyrost energii potencjalnej równy

$$E_{\text{pot}} \approx m\mathrm{g}\frac{l^2}{R}\varepsilon^2,$$

a w przypadku b) – trzykrotnie większy.

Energia kinetyczna opisana jest wzorem

$$E_{\text{kin}} = ml^2\omega^2$$

(ω – prędkość kątowa), a dalej łatwo już wyznaczyć okres drgań

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\mathrm{g}}}, \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{R}{3\mathrm{g}}}.$$

Zauważmy, że T_a jest okresem obiegu Ziemi przez satelitę na niskiej orbicie. Wartości liczbowe wynoszą

$$T_a = 5063\ \text{s} \approx 1\ \text{h}\ 24\ \text{min},$$

$$T_b = 2923\ \text{s} \approx 49\ \text{min}.$$

Ciekawe, że oba okresy są niezależne od długości pręta, skąd można wywnioskować, że taki sam byłby też np. okres drgań cienkiego pręta o masie jednorodnie rozłożonej.

355. Temperatura wrzenia ciekłego azotu pod ciśnieniem normalnym wynosi $-196°$C, a tlenu $-183°$C, czyli jest o $13°$C wyższa. Dlatego tlen z powietrza będzie się skraplał nad ciekłym azotem i „rozcieńczał” go.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
350 ($WT = 1{,}80$) i **351** ($WT = 3{,}37$)
z numeru 1/2003

Marek Wójcicki	– Szczecin	43,87
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	39,74
Tomasz Wietecha	– Tarnów	35,93
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	20,09