Graficzne przedstawianie brył czterowymiarowych

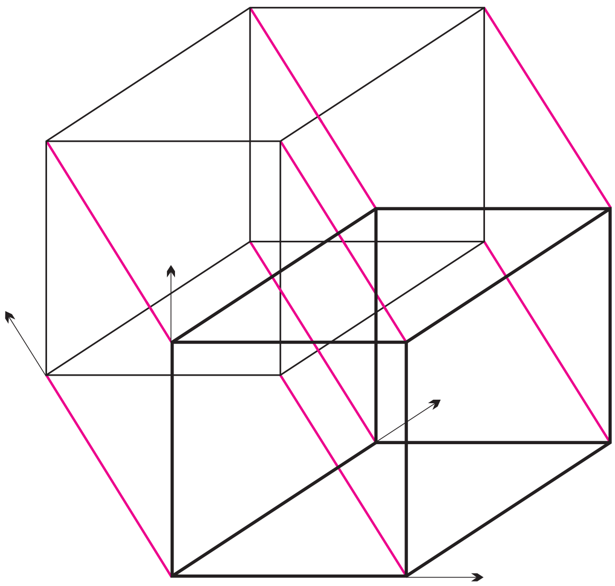
Adam NARKIEWICZ

Załóżmy, że chcemy przedstawić na rysunku czterowymiarowy hipersześcian. Na płaszczyźnie mamy jednak tylko dwie osie współrzędnych, musimy więc zdefiniować dwie kolejne. Niech pierwszą z nich będzie oś z, a drugą oś w. Te dwie nowe abstrakcyjne osie to linie proste przecinające układ współrzędnych w jego środku. Przyjmijmy, że oś z przecina osie x oraz y pod kątem α_x i α_y, odpowiednio. Niech ponadto dla osi w kąty przecięcia osi x i y wynoszą β_x i β_y.

Aby móc przystąpić do naszkicowania obrazu hipersześcianu, musimy jeszcze zdefiniować tzw. współczynnik skrócenia, który dla danej osi abstrakcyjnej jest stosunkiem długości odcinka jednostkowego na tej osi do długości odcinka jednostkowego na osi rzeczywistej. Ustalmy pewne Δ_z i Δ_w (są to współczynniki skrócenia odpowiednio osi z i w). Możemy teraz przystąpić do obliczeń.

Każdemu punktowi czterowymiarowej przestrzeni, $P = (x, y, z, w)$, przypisujemy punkt $P' = (x', y')$, gdzie

$$x' = x + z \cdot \cos\alpha_x \Delta_z + w \cdot \cos\beta_x \Delta_w, \qquad y' = y + z \cdot \cos\alpha_y \Delta_z + w \cdot \cos\beta_y \Delta_w.$$



Rys. 1

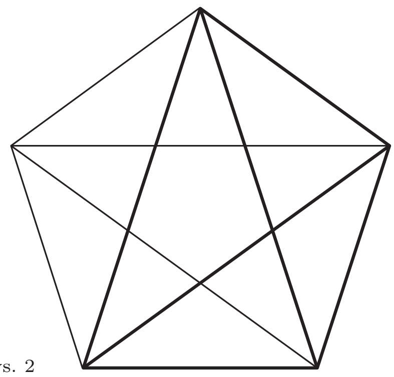
W zależności od wyboru współczynników α_x, α_y, β_x, β_y, Δ_z i Δ_w uzyskujemy różne obrazy hipersześcianu, z których jeden przedstawiony jest na rysunku 1.

Warto teraz przyjrzeć się uważnie i dostrzec wszystkie sześciany stanowiące ściany hipersześcianu (ile ich jest?).

Zajmijmy się teraz bryłą będącą czterowymiarowym odpowiednikiem czworościanu foremnego. Należy on do ciągu figur, w którym każda kolejna figura powstaje przez dodanie jednego wierzchołka do poprzedniej, tak by wszystkie były w jednakowej odległości. Pierwszą figurą tego ciągu jest odcinek, drugą trójkąt równoboczny, a trzecią czworościan foremny. Rozważmy czwartą figurę z tego ciągu. Łatwo zauważyć, że będzie to figura czterowymiarowa, mająca pięć wierzchołków. Szybko uzyskujemy ich współrzędne:

$$A = (0,0,0,0), \quad B = (1,0,0,0), \quad C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0, 0),$$
$$D = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3, 0), \quad E = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/12, \sqrt{10}/4).$$

Spróbujmy teraz wykonać rzut tej figury w dwóch wymiarach. W tym celu znów musimy zdefiniować dwie dodatkowe osie, nazwijmy je w i z, podobnie jak w przypadku hipersześcianu. Na szczęście teraz mamy do czynienia tylko z pięcioma wierzchołkami (hipersześcian ma ich 16), dlatego możemy je wszystkie przedstawić. Ustalmy współczynnik skrócenia i kąty pomiędzy osiami. Jeden z możliwych wyników przedstawia rysunek 2.



Rys. 2

Rozwiązanie zadania F 599.
Niech $\rho_0 vS$ będzie masą wody wychodzącej w jednostce czasu z rury przy prędkości strumienia v i przekroju S. Wtedy moc pompy wynosi:

$$P_0 = \frac{\rho_0 vSv^2}{2}.$$

Po podłączeniu rurki o wysokości h moc pompy musi być równa:

$$P = \frac{\rho_0 uSu^2}{2} + \rho_0 uSgh,$$

gdzie u – prędkość wody wychodzącej przez koniec dodatkowej rury. Mamy też:

$$v^2 = 2gH, \qquad u^2 = 2g(H-h).$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{u}{v}\left[\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{2gh}{v^2}\right] = $$
$$= \frac{u}{v} = \sqrt{1 - \frac{h}{H}}.$$

Rozwiązanie zadania M 1030.
Niech

$$b_n \equiv a_n \bmod m.$$

Wówczas

$$b_n \in \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Różnych trójek

$$(x, y, z) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$$

jest tylko skończenie wiele, więc równość

$$(b_{k-2}, b_{k-1}, b_k) = (b_{l-2}, b_{l-1}, b_l)$$

zachodzi dla pewnych $k \neq l$. Przedłużając definicję ciągu (a_n) dla $n \leqslant 0$, mamy

$$a_0 = a_3 - a_1 = 1 - 1 = 0.$$

Wówczas

$$b_{k+t} = b_{l+t}$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$, również dla t ujemnych, bo

$$b_{n-2} \equiv b_{n+1} - b_{n-1} \bmod m.$$

Zatem ciąg b_n jest okresowy i $b_n = b_0 = 0$ dla nieskończenie wielu n.