KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (5)

Zastanówmy się, ile prostokątów 7×11 można wyciąć z kwadratowej kartki w kratkę o boku 1666.

Zakładając, że uda nam się tego dokonać bez niepotrzebnego marnotrawstwa, możemy mieć nadzieję na wycięcie 36046 prostokątów i pozostawienie tylko 14 kratek niewykorzystanych. Czy jednak taki optymistyczny wariant jest możliwy?

Okazuje się, że nie!

Ponumerujmy kratki kwadratu jak na rysunku 1, gdzie przedstawiono kwadrat o boku 16.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Rys. 1

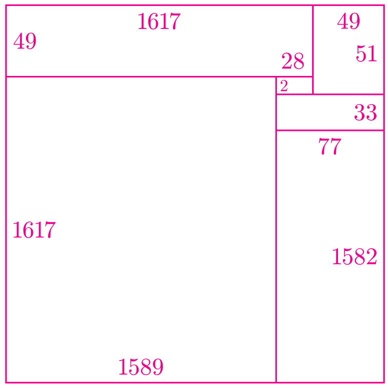
Wówczas poza kwadratem o boku 5, znajdującym się w rogu kartki, każda z liczb od 1 do 11 występuje tyle samo razy.

Jeżeli wytniemy z kartki prostokąty 7×11, to dzieląc każdy z nich na prostokąty 1×11, otrzymamy sposób wycięcia pewnej liczby prostokątów 1×11. Jednak każdy prostokąt 1×11 zawiera pole z liczbą 11. Zatem przy podziale kwadratu na prostokąty 1×11 co najmniej 25 kratek musi zostać zmarnowanych. Nie da się więc wyciąć 36046 prostokątów 7×11.

Czy da się wobec tego wyciąć 36045 prostokątów? Wówczas pozostałoby 91 pól niewykorzystanych.

Próbujmy. Kwadrat 1666×1666 dzielimy na prostokąty 49×1617, 1617×1589, 1582×77, 33×77, 2×28 i 49×51.

Schemat podziału (bez zachowania proporcji) pokazany jest na rysunku 2.

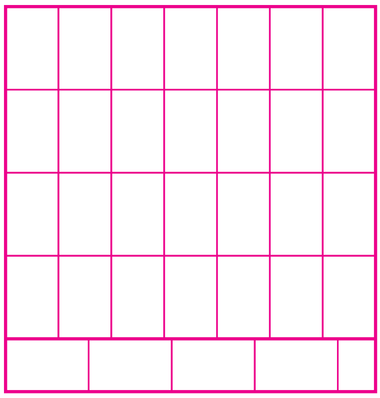


Rys. 2

Pierwsze cztery prostokąty daje się w oczywisty sposób podzielić bez strat na prostokąty 7×11, gdyż każdy z tych prostokątów ma jeden bok o długości podzielnej przez 7, a drugi przez 11.

Prostokąt 2×28, zawierający 56 pól, idzie w całości „na zmarnowanie”.

Pozostaje dokonać podziału prostokąta 49×51 na prostokąty 7×11 przy pozostawieniu niewykorzystanych $91 - 56 = 35$ pól. W tym celu dzielimy prostokąt na prostokąty 49×44 oraz 49×7, z których pierwszy dzielimy na prostokąty 7×11 bez strat, a z drugiego wycinamy cztery prostokąty 7×11, pozostawiając niewykorzystany prostokąt 7×5 (rysunek 3).



Rys. 3

Tym samym podzieliliśmy kwadrat o boku 1666 na prostokąty 7×11, pozostawiając tylko 91 pól niewykorzystanych.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (36′)

Wyjaśnienie oszustwa (36): Rombami spełniającymi warunki zadania są nie tylko kwadraty. Wszystkie inne romby też spełniają warunki zadania!

Niech $ABCD$ będzie dowolnym rombem. Oznaczmy przez S obraz punktu C w obrocie o dowolny niezerowy kąt wokół prostej BD. Wówczas wszystkie ściany boczne ostrosłupa $ABCDS$ są trójkątami równoramiennymi.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl