delta
$h=6{,}63\cdot 10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592\ldots$
POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

Zadania I stopnia Olimpiad 2003/2004 będą opublikowane w Delcie 9/2003

Olimpiada

Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2002/2003

ZAWODY II STOPNIA (21–22 lutego 2003)

1. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2003$, że w ciągu

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{2003}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Dwusieczne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P, a dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q. Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktów D i A. Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o, który nie zawiera punktów B i C. Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN.

3. Dany jest wielomian

$$W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x.$$

Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a, b spełniających równanie

$$W(a) = W(b).$$

4. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki: $0 < 2k < p$ oraz $kp + 3 = x^2 + y^2$.

5. Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O. Z punktu A poprowadzono dwie proste styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C. Pewna styczna do okręgu o przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że z odcinków BP, PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF.

6. Każdej parze liczb całkowitych nieujemnych (x, y) jest przyporządkowana liczba $f(x, y)$ zgodnie z warunkami:

$$f(0,0) = 0;$$
$$f(2x, 2y) = f(2x+1, 2y+1) = f(x, y),$$
$$f(2x+1, 2y) = f(2x, 2y+1) = f(x, y) + 1 \text{ dla } x, y \geqslant 0.$$

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną i niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $f(a, b) = n$. Rozstrzygnąć, ile jest liczb x spełniających równanie $f(a, x) + f(b, x) = n$.

ZAWODY III STOPNIA (14–15 kwietnia 2003)

1. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek CD jest wysokością. Przez środek M boku AB poprowadzono taką prostą przecinającą półproste CA i CB odpowiednio w punktach K i L, że $CK = CL$. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL. Wykazać, że $SD = SM$.

2. Liczba a jest dodatnia i mniejsza od 1. Dowieść, że dla każdego skończonego, ściśle rosnącego ciągu nieujemnych liczb całkowitych $(k_1, \ldots, k_n)$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^2 < \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=1}^{n} a^{2k_i}.$$

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek:

dla każdej liczby naturalnej n liczba 2^n-1 jest podzielna przez $W(n)$.

4. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z, że $0 < x < y < z < p$. Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p, to liczba $x^2 + y^2 + z^2$ jest podzielna przez $x + y + z$.

5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H. Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Udowodnić, że istnieje permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, spełniająca dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ warunek:

x_{i+1} jest jedną z liczb $2x_i$, $2x_i-1$, $2x_i-n$, $2x_i-n-1$, przy czym $x_{n+1} = x_1$.

Informacje o przebiegu LIV Olimpiady Matematycznej

I. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1587 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 597 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 126 uczniów.

II. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 17 kwietnia br. postanowił przyznać 14 osobom dyplom laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów, na 36 punktów możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

I miejsce: Marcin PILIPCZUK (**35 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Leszek Sidz, Agnieszka Kałamajska, Michał Krych, Joanna Jaszuńska i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

II miejsce: Paweł JANUSZEWSKI (**30 pkt.**), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Mieczysław Jędrzejowski i Zdzisław Pogoda).

III miejsce: Witold RĘBACZ (**29 pkt.**), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa, Mieczysław Jędrzejowski, Zdzisław Pogoda, Michał Kapustka, Grzegorz Kapustka i Witold Jarnicki).

IV miejsce: Kamil DUSZENKO (**28 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciel: Bożena Inglot).

Nagrody stopnia drugiego

V–VI miejsce:

Michał LASOŃ (**24 pkt.**), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Ryszard Gruca, Lucyna Cięciwa, Mieczysław Jędrzejowski, Zdzisław Pogoda i Paweł Walter).

Aleksander ZABŁOCKI (**24 pkt.**), kl. IV, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (n.: Zbigniew Bobiński, Maria Kobus i Alina Semrau).

VII miejsce: Bartłomiej ROMAŃSKI (**23 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Jerzy Bednarczuk, Wiktor Bartol i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

Nagrody stopnia trzeciego

VIII miejsce: Bartosz WALCZAK (**20 pkt.**), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Ryszard Gruca, Mieczysław Jędrzejowski i Paweł Walter).

IX–X miejsce:

Krzysztof CHOROMAŃSKI (**18 pkt.**), kl. III, II LO im. Stefana Batorego w Warszawie (n.: Alfreda Klimczewska).

Mateusz MICHAŁEK (**18 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka, Jacek Dymel, Tomasz Michałek i Paweł Walter).

XI miejsce: Jan CZAJKOWSKI (**17 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Wiesław Suchocki, Zbigniew Romanowicz, Artur Jeż i Mateusz Kwaśnicki).

XII–XIV miejsce:

Tomasz KAZIMIERCZUK (**14 pkt.**), kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (n.: Ewa Wierdak).

Joanna PANECKA (**14 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Agnieszka Kałamajska, Leszek Sidz i Michał Krych).

Lech STAWIKOWSKI (**14 pkt.**), kl. III, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża, Zbigniew Romanowicz i Rafał Kulik).

III. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 16 zawodników:

Miejsca XV–XXVIII:

Jadwiga COGIEL (**12 pkt.**), kl. IV, I LO w Lublińcu (n.: Urszula Pęsik i Józef Kalinowski).

Piotr DANILEWSKI (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka, Janina Kłapyta, Ryszard Gruca i Marzanna Jaszczewska).

Maria DONTEN (**12 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Agnieszka Kałamajska, Leszek Sidz, Jakub Onufry Wojtaszczyk i Michał Krych).

Rafał FABIAŃSKI (**12 pkt.**), kl. IV, LO im. Macieja Rataja w Strzelcach Krajeńskich (n.: Beata Domaradzka).

Michał JASZCZYK (**12 pkt.**), kl. III, XIII LO w Szczecinie (n.: Michał Szuman i Beata Bogdańska).

Damian KONIECKI (**12 pkt.**), kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (n.: Ewa Wierdak).

Tomasz KURAS (**12 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka i Janina Kłapyta).

Tomasz KURPIOS (**12 pkt.**), kl. IV, Zespołu Szkół Ogólnokształcacych nr 4 w Bydgoszczy (n.: Halina Kwiatkowska).

Tomasz LENARCIK (**12 pkt.**), kl. III, I LO im. Stefana Żeromskiego w Kielcach (n.: Katarzyna Dąbrowska-Adach, Andrzej Lenarcik i Maciej Sękalski).

Stefan ŁAPICKI (**12 pkt.**), kl. I, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża).

Arkadiusz PAWLIK (**12 pkt.**), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Mieczysław Jędrzejowski, Ryszard Gruca, Zdzisław Pogoda i Witold Jarnicki).

Michał PILIPCZUK (**12 pkt.**), kl. III, 20. Społecznego Gimnazjum Ogólnokształcącego w Warszawie (n.: Joanna Jaszuńska, Adam Smólski i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

Piotr PŁOSZYŃSKI (**12 pkt.**), kl. IV, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (n.: Henryk Pawłowski).

Kacper ZAJĄC (**12 pkt.**), kl. I, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża, Paweł Głowacki i Zbigniew Romanowicz).

Miejsca XXIX–XXX:

Aleksander PIOTROWSKI (**11 pkt.**), kl. III, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (n.: Zdzisława Graczyk i Henryk Pawłowski).

Przemysław UZNAŃSKI (**11 pkt.**), kl. IV, III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni (n.: Wojciech Tomalczyk).

IV. W skład delegacji polskiej na XLIV Międzynarodową Olimpiadę Matematyczna, która odbędzie się w Tokio (Japonia) w dniach 10–20 lipca br. powołani zostali:
Kamil Duszenko,
Paweł Januszewski,
Michał Lasoń,
Marcin Pilipczuk,
Witold Rębacz,
Aleksander Zabłocki.

Jako zawodników rezerwowych powołano *Bartłomieja Romańskiego* i *Bartosza Walczaka.*

V. Na XXVI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 21 czerwca–1 lipca br. w Austrii w miejscowości Graz powołano delegację, w skład której wejdą:
Krzysztof Choromański,
Jan Czajkowski,
Michał Pilipczuk,
Bartłomiej Romański,
Lech Stawikowski,
Bartosz Walczak.

Zawodnicy rezerwowi: *Tomasz Lenarcik* i *Kacper Zając.*

VI. Powołano tez delegację na XIV Olimpiadę Matematyczną Państw Bałtyckich, która odbędzie się na Łotwie na początku listopada br. Skład tej delegacji jest następujacy:
Piotr Danilewski,
Michał Jaszczyk,
Tomasz Kuras,
Stefan Łapicki,
Mateusz Michałek.

Zawodnicy rezerwowi: *Tomasz Lenarcik* i *Kacper Zając.*

VII. Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbędzie się w dniach 1–15 czerwca br. w Domu Wczasowym Zgoda w Zwardoniu. Na obóz ten zostały powołane następujące osoby:

Maciej Balawender,
Krzysztof Choromański,
Jan Czajkowski,
Piotr Danilewski,
Kamil Duszenko,
Andrzej Grzesik,
Aleksander Jankowski,
Paweł Januszewski,
Michał Jaszczyk,
Leszek Jurkowski,
Tomasz Kuras,
Tomasz Lenarcik,
Stefan Łapicki,
Mateusz Michałek,
Hubert Orlik-Grzesik,
Michał Pilipczuk,
Witold Rębacz,
Bartłomiej Romański,
Bartosz Walczak,
Kacper Zając.

Zawodnicy rezerwowi: *Maciej Jaśkowski, Paweł Gora* i *Jakub Kallas.*

Wskutek uwzględnienia ewentualnych odwołań składy powyższych delegacji mogą ulec zmianie.

LII OLIMPIADA FIZYCZNA 2002/2003

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej: http:/www.kgof.edu.pl

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Wewnątrz satelity poruszającego się po orbicie geostacjonarnej umieszczono układ dwóch małych, identycznych kulek o masie dużo większej od masy łączącego je sztywnego pręta. Układ może swobodnie obracać się wokół nieruchomego względem satelity środka pręta. Znajdź położenia równowagi układu kulek i pręta. Wyznacz okres małych drgań układu w płaszczyźnie orbity wokół położenia równowagi.

Uwaga: Siły grawitacji działające na obie kulki nie są równe, możesz jednak przyjąć, że są równoległe.

Wskazówka: Dla małych wartości x można stosować przybliżenie: $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$.

2. Ichtiolog oglądał przez lupę rybkę pływającą w akwarium na głębokości $h = 10$ cm. Użyta lupa była soczewką dwuwypukłą o obu promieniach krzywizn równych $R = 25$ cm, wykonaną ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}5$. Lupa umieszczona została poziomo na wysokości $w = 5$ cm nad powierzchnią wody w taki sposób, aby obserwowana rybka znajdowała się na osi symetrii soczewki. Następnie ichtiolog opuścił lupę na powierzchnię wody zanurzając jedną stronę soczewki. Jakie było położenie obrazu rybki w obu przypadkach? Współczynnik załamania światła w wodzie $n' = \frac{4}{3}$.

3. W niektórych sondach kosmicznych stosuje się źródła energii wykorzystujące zjawisko rozpadu β^- (z jądra emitowany jest elektron) zachodzące między innymi w plutonie ^{241}Pu.

Rozważ ogniwo składające się z kwadratowej blaszki o grubości $d = 0{,}1$ mm i boku $a = 10$ cm wykonanej z plutonu ^{241}Pu umieszczonej pomiędzy przewodzącymi blaszkami o grubości dostatecznej, by pochłonąć wszystkie wyemitowane elektrony. Zewnętrzne blaszki są ze sobą zwarte i tworzą elektrodę ujemną, natomiast środkowa plutonowa blaszka tworzy elektrodę dodatnią. Odległość pomiędzy środkową blaszką a każdą z blaszek zewnętrznych wynosi $l = 1$ mm. Oblicz stacjonarne natężenie prądu generowanego przez to ogniwo.

Wyznacz czas, po którym napięcie nieobciążonego ogniwa wzrośnie od 0 do $U = 100$ V.

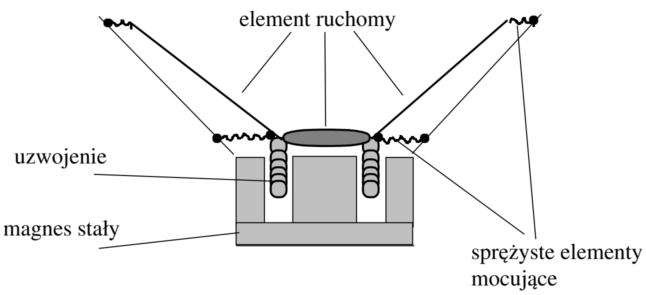
Gęstość plutonu $\rho = 19{,}8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, a jego czas połowicznego zaniku $T = 13$ lat. Przyjmij, że wszystkie wyemitowane elektrony docierają do elektrody ujemnej, a czas ładowania jest zaniedbywalnie krótki w porównaniu z czasem połowicznego zaniku.

Zadanie doświadczalne. Element ruchomy głośnika można traktować jako ciało sztywne, o pewnej masie, przymocowane sprężyście do obudowy głośnika. Element ten może wykonywać drgania harmoniczne.

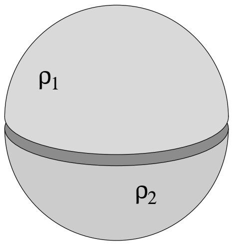
Masz do dyspozycji:
- głośnik,
- generator napięcia sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości,
- woltomierz napięcia zmiennego,
- trzy monety 50 gr o masie 3,95 g każda,
- monetę 2 zł,
- kawałki dwustronnej taśmy klejącej o gęstości powierzchniowej 0,01 g/cm^2,
- papier milimetrowy,
- przewody elektryczne umożliwiające zestawienie układu doświadczalnego.

1. Wyznacz masę monety 2 zł.
2. Wyznacz masę elementu ruchomego głośnika.

Wskazówka: Połącz głośnik z generatorem i wyznacz częstotliwość, dla której napięcie zmienne mierzone na głośniku osiąga maksymalną wartość. Przyjmij, że częstotliwość ta odpowiada częstotliwości drgań własnych elementu ruchomego głośnika.

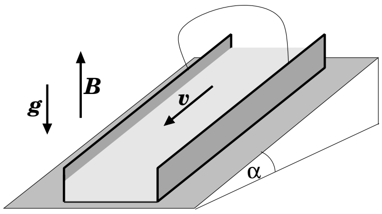


ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA



1. Dwie półkule o promieniach R, wykonane z izolatora, naładowano równomiernie ładunkami o gęstościach objętościowych ρ_1 i ρ_2 i zbliżono do siebie na bardzo niewielką odległość – rysunek. Oblicz siłę wzajemnego oddziaływania tych półkul.

2. W korytku przymocowanym do równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 1°$ płynie nielepka ciecz o gęstości $\rho = 1$ g/cm^3 i przewodnictwie właściwym $\sigma = 100\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Pionowe ścianki korytka wykonane z idealnie przewodzącego materiału są zwarte ze sobą, a dno jest płaskie i nieprzewodzące. Całość znajduje się w jednorodnym, skierowanym pionowo w górę, polu magnetycznym.



Oblicz, jaką wartość ma indukcja tego pola, jeżeli stacjonarny i jednorodny przepływ cieczy odbywa się ze stałą prędkością $v = 5\,\mathrm{m/s}$.

Przyjmij, że przepływ masy odbywa się tylko wzdłuż korytka, a indukowany prąd elektryczny płynie w poprzek. Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego g = 9,81 m/s^2.

3. Płaska, doskonale czarna powierzchnia o stałej temperaturze T_w jest umieszczona równolegle do innej doskonale czarnej płaszczyzny o stałej temperaturze T_n, niższej od T_w. Między powierzchniami jest próżnia.

W celu zmniejszenia powodowanego promieniowaniem przepływu ciepła pomiędzy powierzchniami umieszczono ekran złożony z m cienkich czarnych płyt odizolowanych od siebie termicznie i leżących równolegle do płaszczyzn.

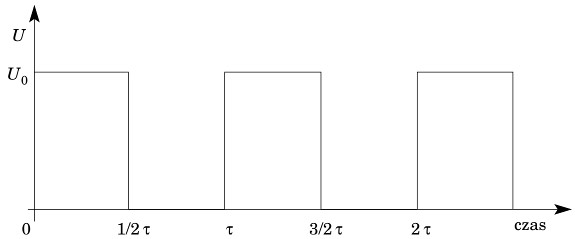
Ile razy zmniejszył się strumień promieniowania (energia przekazana w jednostce czasu na jednostkę powierzchni) pomiędzy płaszczyznami po wstawieniu ekranu?

Wyznacz temperatury kolejnych płyt $1,\ 2, \ldots, m$ i podaj wartości liczbowe dla $m = 9$, $T_\mathrm{w} = 1300°$ C, $T_\mathrm{n} = 300°$ C. Efekty związane ze skończonymi rozmiarami powierzchni zaniedbaj.

Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:

- żarówkę z włóknem wolframowym, o napięciu znamionowym 2,2 V,
- oscyloskop,
- zasilacz napięcia stałego, regulowanego w zakresie $0 \div 3$ V,
- opornik o oporności 1 Ω,
- przewody elektryczne,
- papier milimetrowy.

Dodatkowo, w części B zadania, masz do dyspozycji układ elektroniczny przetwarzający napięcie stałe z zakresu od 1 V do 3 V w napięcie zmienne o regulowanej amplitudzie U_0 oraz regulowanym okresie τ (patrz rysunek).



Część A. Wyznacz doświadczalnie moc oddawaną przez żarówkę do otoczenia w zależności od temperatury jej włókna. Uzyskane wyniki przedstaw na wykresie.

Część B. Wyznacz masę gorącej części włókna żarówki. Przyjmij, że ciepło właściwe wolframu nie zależy od temperatury i wynosi $c_w = 1440\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$.

W obu częściach zadania przyjmij, że opór włókna żarówki R_w jest liniową funkcją temperatury:

$$R_w(T) = R_0(1 + \alpha_R(T - T_0)),$$

gdzie T – bezwzględna temperatura włókna, natomiast R_0 – opór włókna w temperaturze pokojowej T_0. Przyjmij $\alpha_R = 4,5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$, $T_0 = 295$ K.

Uwaga! Przed włączeniem napięcia zasilania poproś asystenta o sprawdzenie układu.

Laureaci LII Olimpiady Fizycznej 2002/2003

1. Szymon Piotr SZAFRANIEC, kl. IV, II LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Gorzowie Wlkp. (nauczyciel: mgr Bogumiła Jankowska).

2. Marcin Łukasz PILIPCZUK, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska).

3. Krzysztof IWASZCZUK, kl. IV, I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku (nauczyciel: mgr Mirosława Żuber).

4. Bartłomiej Maciej SZCZYGIEŁ, kl. III, II LO im. Cypriana Kamila Norwida w Jeleniej Górze (nauczyciel: mgr Andrzej Jarnuszkiewicz).

5. Tomasz Wiktor KAZIMIERCZUK, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: mgr Barbara Lenert).

6. Leszek Grzegorz GRUDZIEŃ, kl. IV, II LO im. Jana Śniadeckiego w Kielcach (nauczyciel: mgr Beata Prędota).

7. Piotr Krzysztof MIGDAŁ, kl. I, V LO w Bielsku-Białej (nauczyciel: mgr Ewa Gajda).

8. Mateusz Michał NOWACZYK, kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi (nauczyciel: mgr Hanna Szyburska).

9. Jerzy Stanisław ORŁOWSKI, kl. IV, XXVII LO im. Tadeusza Czackiego w Warszawie (nauczyciel: mgr Maria Kuśmierek).

10. Damian KONIECKI, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: mgr Grzegorz Depczyński).

11. Kamil FABER, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).

12. Jan Aleksander GUTT, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).

13. Michał Piotr HELLER, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: mgr Ryszard Zapała).

14. Łukasz Piotr BĄK, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: dr Sławomir Brzezowski).

15. Paweł Zbigniew BUDZOWSKI, kl. IV, LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli (nauczyciel: mgr Stanisław Szymonik).

16. Artur Jan FIJAŁKOWSKI, kl. IV, III LO im. Adama Mickiewicza w Katowicach (nauczyciel: dr Halina Broda).

17. Piotr STAWIŃSKI, kl. IV, I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (nauczyciel: mgr Maria Kłysz).

18. Krzysztof Grzegorz SOBCZAK, kl. IV, V LO im. ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie (nauczyciel: mgr Anna Mazurkiewicz).

19. Paweł ŚLEDŹ, kl. III, XIII LO w Szczecinie (nauczyciel: mgr Krzysztof Łyszczek).

20. Mateusz Józef MICHAŁEK, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: dr Sławomir Brzezowski).

21. Łukasz PAWICKI, kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciel: mgr Marian Bąk).

22–23. Marek Jerzy SZYPROWSKI, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).

22–23. Adam Jan LATOSIŃSKI, kl. IV, I Społeczne LO im. Hetmana Jana Tarnowskiego w Tarnobrzegu (nauczyciel: mgr Jacek Bąk).

XLVI OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2002/2003

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (druga seria)

1. Planetoida o średnicy $d = 65$ km, obiegająca Słońce po orbicie kołowej w okresie $P = 5{,}5$ lat, zakrywa odległą gwiazdę. W czasie zakrycia planetoida porusza się na sferze z prędkością $\rho = 26''/\text{godz.}$, a jej elongacja wynosi $\gamma = 90°$. Zakładając, że planetoida ma kształt sferyczny, a zakrycie zachodzi centralnie, oblicz czas zakrycia. Jak nazywałoby się to zjawisko, gdyby uczestniczył w nim Pluton, a nie zakrywana gwiazda? Dane dotyczące Plutona znajdź samodzielnie i podaj ich źródło.

2. Dwie gwiazdy z trudem mieszczą się na średnicy pola widzenia teleskopu. Oblicz deklinacje tych gwiazd wiedząc, że są one sobie równe, a ich rektascensje różnią się o $\Delta\alpha = 0{,}^{\mathrm{h}}1$. Wiadomo też, że pewna gwiazda leżąca na równiku niebieskim przechodzi przez średnicę pola widzenia tego teleskopu w czasie $\Delta t = 2$ min.

3. Pewna gwiazda jest odległa od nas o 250 lat świetlnych. Moc promieniowania od tej gwiazdy wynosi $6{,}4 \cdot 10^{-10}$ W/m^2, a maksimum promieniowania przypada na długość fali $\Lambda = 2{,}634 \cdot 10^{-7}$ m. Oblicz temperaturę, promień i całkowitą moc promieniowania tej gwiazdy w jednostkach promieniowania Słońca.

4. Krótko opisz jedno z najciekawszych dla Ciebie wydarzeń astronomicznych ostatnich kilku lat. Podaj źródła swoich informacji.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Dla gwiazd ciągu głównego temperatura T z dobrym przybliżeniem jest proporcjonalna do ilorazu masy M i promienia R, czyli
$$T \sim \frac{M}{R}.$$
Istnieją również związki między masą i promieniem. Dla gwiazd o masach małych i średnich jest w przybliżeniu $R \sim M$. W przypadku gwiazd bardzo masywnych można przyjąć $R \sim \sqrt{M}$. Posługując się tymi wzorami oszacuj czas przebywania na ciągu głównym gwiazd o najmniejszych masach (8% masy Słońca) wiedząc, że gwiazda o masie Słońca znajduje się na ciągu głównym przez około 10^{10} lat. Oszacuj również masę, jaką mogą mieć najmasywniejsze gwiazdy, przyjmując, że za gwiazdę można uznać obiekt, który pozostaje na ciągu głównym przez czas co najmniej rzędu 10^4 lat.

Dla uproszczenia przyjmij, że stałe proporcjonalności dla gwiazd o małych i dużych masach są takie same jak dla Słońca.

2. 18 stycznia 2000 roku nastąpiło zderzenie z Ziemią dużego meteoroidu, który nazwano Tagish Lake od nazwy jeziora, w okolicach którego spadły jego resztki. Związany ze zderzeniem bolid był doskonale obserwowany i udało się zmierzyć prawie wszystkie interesujące wielkości z nim związane. Z pewnym przybliżeniem, mającym na celu ułatwienie rachunków, dane te przedstawiają się następująco:

- moment spadku $16^{\mathrm{h}}43^{\mathrm{m}}$ UT,
- miejsce spadku 60 N, 135 W,
- azymut lotu 155° (azymut liczony od południa przez zachód, a więc bolid leciał z kierunku północno-północno-zachodniego),
- całkowita energia wypromieniowana w czasie zjawiska wyniosła $1{,}1 \cdot 10^{12}$ J,
- prędkość w atmosferze 15 km/s,
- gęstość meteoroidu (na podstawie znalezionych meteorytów) około 1500 kg/m^3.

Wiedząc, że na promieniowanie zamieniło się około 5% energii mechanicznej ciała, a meteoroid leciał praktycznie w płaszczyźnie ekliptyki, oblicz promień meteoroidu i oszacuj wielką półoś orbity.

Uwagi:

1. Parametry dotyczące Słońca, Ziemi oraz jej orbity potraktuj jako dane. Prędkość ciała na eliptycznej orbicie keplerowskiej ma postać

$$v = \sqrt{\mathrm{G}M_\odot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

gdzie:
$M_\odot$ – masa Słońca,
G – stała grawitacji,
r – odległość od Słońca,
a – wielka półoś orbity.

2. Ułatwieniem rozwiązania może być sporządzenie rysunku zdarzenia widzianego od strony północnego bieguna ekliptyki.

3. W ewolucji gwiazd wprowadza się pojęcia odpowiednich skal czasowych. Jedną z nich jest dynamiczna skala czasowa określana jako czas potrzebny do zapadnięcia się gwiazdy, podczas jej kurczenia się, gdyby nie było sił przeciwdziałających takiemu kurczeniu. Wtedy byłby to spadek swobodny warstwy zewnętrznej do środka gwiazdy. Oszacuj ten czas dla Słońca, przyjmując masę Słońca $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg i promień Słońca $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ m.

4. Przeczytaj tekst załączonego fragmentu artykułu („Windą do nieba”, *Polityka* nr 49, 7 grudnia 2002), a następnie przedyskutuj realność (od strony fizyczno-astronomicznej) proponowanego przedsięwzięcia.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. W lutowym numerze *Sky & Telescope* z roku 2001 ukazała się notatka o znalezieniu pary prawie bliźniaczych związanych grawitacyjnie planetoid o jasności 24 magnitudo każda. Według tej notatki okres wzajemnego obiegu planetoid wynosi około 4 lat, odległość kątowa – cztery sekundy, a odległość między tymi ciałami – 130 tysięcy kilometrów. Dodatkowo podano, że rozmiary planetoid wynoszą około 100 kilometrów. Powyższe dane są przybliżone i dlatego są nieco sprzeczne. Przedyskutuj je, a w szczególności rozpatrz problem rozmiarów planetoid w świetle pozostałych przytoczonych danych. W celu porównania użyj danych Charona znajdującego się w zbliżonej odległości od Słońca (wg *Szkolnego Słownika Astronomii*: magnitudo 16,8, promień 595 km, masa $1{,}77 \cdot 10^{21}$ kg).

2. W drugim etapie olimpiady spotkaliśmy się z tzw. dynamiczną skalą czasową. Ewolucja obłoku gazowego może zachodzić w czasie zbliżonym do tej skali, jeżeli energia kurczącego się obłoku nie jest zamieniana na energię termiczną. Zachodzi to w przypadku intensywnego chłodzenia (np. przez wypromieniowanie) lub gdy w obłoku pojawi się „kanał” pochłaniający energię. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z kurczeniem się niezjonizowanego gazu, a w drugim, gdy energia grawitacyjna zamieniana jest na energię dysocjacji i jonizacji. Kurczenie obłoku następuje w każdym przypadku, gdy energia grawitacyjna jest większa co do modułu od energii termicznej, a w przeciwnym przypadku następuje rozprężanie. Zakładając dla uproszczenia, że energia grawitacyjna obłoku jest opisana wzorem[1)]

$$E_g = -\frac{3\mathrm{G}M^2}{5R},$$

gdzie M – masa obłoku, R – jego promień, oszacuj:

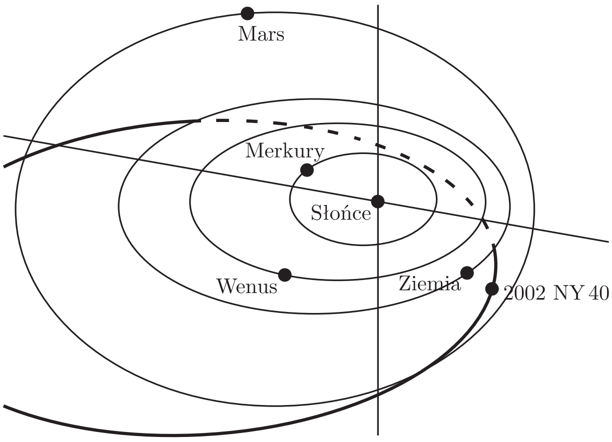
1. Jaką gęstość musi mieć obłok wodoru H_2 o masie równej masie Słońca ($2 \cdot 10^{30}$ kg) i temperaturze 20 K, by móc zacząć kurczenie.
2. Jaki będzie promień powstałej w ten sposób protogwiazdy, jeżeli założyć, że połowa energii grawitacyjnej wydzielonej w trakcie kurczenia

   zostanie zamieniona na energię dysocjacji (4,5 eV na cząsteczkę) i jonizacji (13,6 eV na atom, 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J), a promień protogwiazdy odpowiada momentowi, gdy jonizacja dotyczy całej gwiazdy.

[1)] Wzór jest wprawdzie słuszny dla sferycznego i jednorodnego obłoku, powinien jednak dać wartości zbliżone do rzeczywistości, mimo że prawdziwy obłok nie jest jednorodny ani pod względem gęstości, ani temperatury.

3. Asteroida 2002 NY 40 zbliżyła się do Ziemi na odległość 540 000 km. Na rysunku zaznaczono pozycję planetoidy w dniu zbliżenia.

Nachylenie orbity asteroidy do ekliptyki jest niewielkie. Zakładając, że asteroida jest kulą odbijającą światło jak ziemski Księżyc i wiedząc, że jej jasność obserwowana wynosiła 6,5 mag oraz korzystając z dodatkowych przyjętych przez siebie danych i uproszczeń, oceń średnicę planetoidy. Wymień wszystkie przyjęte przez siebie uproszczenia i założenia oraz przeprowadź ocenę jakości swojego oszacowania.



4. Aparatura planetarium odtworzy dwukrotnie wygląd nieba obserwowany w obecnych czasach przez „hipotetycznego” obserwatora z powierzchni jednej z planet Układu Słonecznego*. Określ z możliwie największą dokładnością czas i miejsce obserwacji.

Podaj pełne uzasadnienie odpowiedzi.

*Na kopule planetarium był odtworzony wygląd nieba z powierzchni Merkurego w dniu, w którym z Ziemi obserwuje się przejście Merkurego przed tarczą Słońca (7 maja 2003 r). Rozwiązując zadanie uczestnik dysponował Atlasem Nieba i Kalendarzem Astronomicznym na 2003 r.

5. Na podstawie samodzielnie przeprowadzonych obserwacji Księżyca**:

a) oceń jego współrzędne horyzontalne,

b) zaznacz na załączonej mapce linię terminatora,

c) dokonaj identyfikacji widocznych w polu widzenia lunetki elementów powierzchni zaobserwowanych w pobliżu terminatora.

d) wyznacz kąt pomiędzy kierunkiem przechodzącym przez końce linii widocznego terminatora a kierunkiem koła godzinnego przechodzącego przez Księżyc.

**Zadanie było rozwiązywane na tarasie obserwatorium astronomicznego. Uczestnik dysponował małą lunetką, mapą Księżyca, Atlasem Nieba, Kalendarzem Astronomicznym na 2003 r. oraz dokładnym zegarem.

6. W dniu 7 maja 2003 roku pomiędzy $5{,}2^{\mathrm{h}}$ oraz $10{,}5^{\mathrm{h}}$ UT nastąpi przejście Merkurego przed tarczą Słońca. Podaj przybliżony termin następnego podobnego zjawiska.

Przyjmij następujące założenia:

1. Orbity Ziemi i Merkurego są okręgami.
2. Średnica kątowa tarczy Słońca obserwowanego z Ziemi wynosi $32'$.
3. Wielka półoś (w przyjętych założeniach promień) orbity Merkurego $a = 0{,}387$ AU.
4. Nachylenie orbity Merkurego względem ekliptyki $i\ = 7{,}0°$.
5. Okres obiegu Merkurego wokół Słońca wynosi $87{,}97^{\mathrm{d}}$.
6. Średnica Merkurego wynosi 4880 km.

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

I miejsce: Piotr GUZIK, kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie.

II miejsce: Krzysztof PUTYRA, kl. IV, V LO w Bielsku-Białej.

III miejsce: Krzysztof BARCZYŃSKI, kl. IV, LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie.

IV miejsce: Michał GROSS, kl. IV, II LO im. Cypriana Kamila Norwida w Tychach.

V miejsce ex aequo:

Dawid ŁUSZCZKI, kl. IV, II LO im. Pułkownika Leopolda Lisa-Kuli w Rzeszowie.

Bartosz FORNAL, kl. IV, I LO im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie.

Finaliści

Krzysztof MAZURKIEWICZ, kl. III, I LO im. Filomatów Ziemi Michałowskiej w Brodnicy.

Paweł WOJTCZAK, kl. V, Zespół Szkół Politechnicznych im. Bohaterów Monte Cassino we Wrześni.

Krzysztof MILLER, kl. III, V LO im. Wspólnej Europy w Olsztynie.

Marcin GRONOWSKI, kl. I, II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Grudziądzu.

Zbigniew ARTEMIUK, kl. IV, LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Przasnyszu.

Wyróżnienie za rozwiązanie zadania w sali planetarium otrzymał

Jakub SKOWRON, kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.