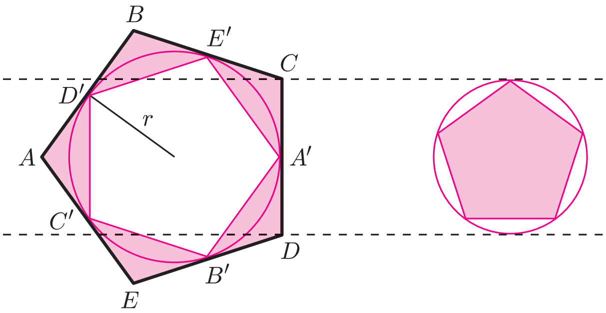
Twierdzenie Du Faya

Paweł KUBIT

Du Fay był matematykiem francuskim żyjącym w pierwszej połowie XVIII wieku. Wykazał on, że: **różnica pól pięciokątów foremnych $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ – opisanego i wpisanego w ten sam okrąg – równa się polu pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o średnicy równej bokowi AB pięciokąta opisanego.**

Ilustruje to rysunek 1: pola zaznaczone kolorem są równe (zapiszmy to $P_5 = p_5$).



Rys. 1. Ilustracja twierdzenia, gdy $n = 5$.

Okazuje się, że twierdzenie to jest prawdziwe w przypadku dowolnego n-kąta, a nie tylko gdy $n = 5$. Oznaczmy przez P_n pole figury z lewej strony powyższego rysunku, gdy pięciokąt zastąpimy n-kątem (a przez p_n – pole figury z prawej strony).

Aby się przekonać o prawdziwości twierdzenia, należy obliczyć pola n-kątów opisanego i wpisanego w dany okrąg o promieniu r.

Pierwsze z nich jest równe $F_1 = nr^2 \operatorname{tg}(\pi/n)$, a drugie $F_2 = 1/2nr^2 \sin(2\pi/n)$,

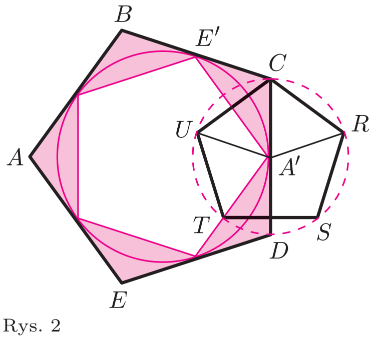
$$P_n = F_1 - F_2 = \frac{nr^2(\sin\pi/n)^3}{\cos\pi/n}.$$

Natomiast p_n obliczymy stosując wzór na F_2 przy promieniu $R = r\operatorname{tg}(\pi/n)$, bo taki jest wzór na połówkę boku n-kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu r. Przekonamy się, że $P_n = p_n$.

Zauważmy też, że $\lim P_n = 0$, a przy dużych n

$$P_n \approx [\pi^3 r^2]/n^2.$$

Dowód Du Faya dla pięciokąta jest czysto geometryczny. Wystarczy bowiem „mała modyfikacja" rysunku 1, polegająca na tym, że figurę z prawej strony przesuniemy tak, by odcinek CD był średnicą (przesuniętego okręgu).



Rys. 2

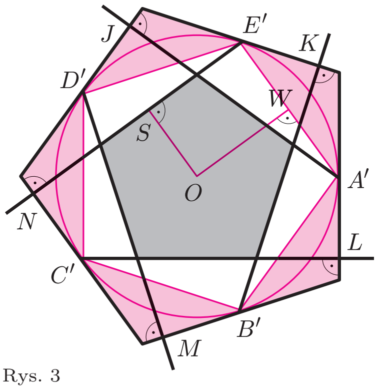
Czworokąt $E'CA'U$ jest rombem. Mamy bowiem: $E'C = CA' = A'U = r_2$ (jest to promień okręgu, w który wpisaliśmy pięciokąt $CRSTU$, a zarazem połowa boku CD).

Ponadto, co ma kluczowe znaczenie, odcinki $E'C$ i UA' są równoległe. Bowiem suma miar kątów $E'CA'$ i $CA'U$ jest równa:

$$(*) \qquad \frac{3}{5}\pi + \frac{1}{5}\cdot 2\pi = \pi.$$

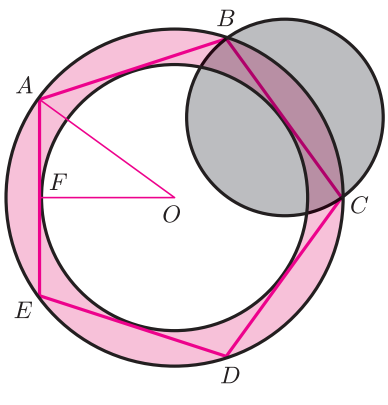
Przekątne każdego rombu dzielą go na 4 przystające trójkąty prostokątne, zatem pola trójkątów $E'CA'$ i $CA'U$ są równe, tj. $P_5 = p_5$. To rozumowanie można „uratować" w przypadku dowolnego n-kąta: w równaniu $(*)$ mamy wtedy $\pi[(n-2)/n] + 2\pi/n = \pi$.

Jest jeszcze jedna interpretacja tego twierdzenia. Z wierzchołków pięciokąta wpisanego prowadzimy proste prostopadłe do boków pięciokąta opisanego: $A'J, B'K, C'L, D'M, E'N$. Utworzą one pięciokąt foremny (na rysunku 3 zaznaczony na szaro), którego pole jest równe polu figury kolorowej na tym rysunku, tj. P_5. Ze środka O opuszczamy prostopadłe OS i OW do odcinków $E'N$ i $E'A'$. Powstaje prostokąt $OSE'W$, tj. $OS = A'E'/2$. Ten odcinek (OS) jest równy wysokości trójkąta $A'UC$ z rysunku 2 poprowadzonej z wierzchołka A'.



Rys. 3

Możemy sobie teraz rozważyć sytuację odwrotną. Mianowicie taką, że weźmiemy koło opisane i wpisane w ustalony pięciokąt foremny. Spójrzmy na poniższy rysunek.



Rys. 4

Niech OA będzie promieniem koła opisanego, OF – promieniem koła wpisanego. Twierdzenie Pitagorasa daje: $OA^2 = OF^2 + AF^2 = OF^2 + AB^2/4$. Stąd: $\pi(OA^2 - OF^2) = \pi AB^2/4$, to znaczy, że **różnica pól koła opisanego i wpisanego w pięciokąt foremny równa się polu koła o średnicy równej bokowi tegoż pięciokąta.** Pozostaje to prawdą w przypadku dowolnego n-kąta foremnego.