# O wyglądzie ciał w ruchu

*Andrzej NOWOJEWSKI, Jakub KALLAS, Andrzej DRAGAN*

Szczególna teoria względności dostarcza swoim adeptom niezwykłych wrażeń. Pierwszą reakcją jest jednak zawsze zdziwienie. Tempo upływu czasu jest względne? Rozmiary ruchomych obiektów zależą od obserwatora? Nonsens! A jednak tak właśnie jest i nasz zdrowy rozsądek okazuje się być złym doradcą. Wątpliwości nie ma tylko co do jednej rzeczy: teoria względności jest niezwykle ciekawa i wzbudza zainteresowanie nie tylko fizyków, ale także amatorów i kibiców nauki.

Aby przybliżyć tę wspaniałą teorię szerszemu gronu, napisano wiele książek popularnonaukowych, a wśród nich, jako jedną z pierwszych, uroczą książeczkę laureata Nagrody Nobla, George'a Gamowa „Pan Tompkins w Krainie Czarów". Jej tytułowy bohater przenosi się we śnie do świata, w którym prędkość światła jest niewiele większa od prędkości pędzącego rowerzysty i gdzie wszystkie niesłychane relatywistyczne zjawiska są na porządku dziennym. Pan Tompkins na własne oczy może przekonać się, że jadący rower jest krótszy, a zegarek na ręce rowerzysty chodzi wolniej. Dzięki wizycie w „Krainie Czarów" Pan Tompkins (wraz z Czytelnikiem) zamiast studiować trudne podręczniki może na własnej skórze przekonać się na czym polega teoria względności. Lektura książeczki Gamowa byłaby świetnym sposobem na wyobrażenie relatywistycznego świata, gdyby nie jeden drobny szczegół, o którym autor celowo, bądź przypadkiem zapomniał… Otóż Pan Tompkins podróżując po Krainie Czarów stwierdza, że wszystkie ruchome przedmioty skracają się w kierunku ruchu. I jest tak w rzeczywistości, np. jadący rower jest zawsze krótszy o czynnik $\sqrt{1-(v/\mathrm{c})^2}$, gdzie $v$ jest prędkością roweru, a c prędkością światła. Nie oznacza to jednak wcale, że rower będzie wyglądał na krótszy! Nic podobnego! Zapewne brzmi to nieco od rzeczy, ale weźmy pod uwagę fakt, że obraz roweru jest tworzony przez światło docierające do obserwatora zawsze z pewnym opóźnieniem. Jeśli zatem sam rower porusza się z prędkością porównywalną z c, to gdy światło dotrze do oka Pana Tompkinsa, rower w międzyczasie zdąży się nieco przesunąć (dokładnie ten sam efekt możemy stwierdzić słysząc lecący odrzutowiec: dźwięk nie dochodzi z miejsca, w którym on się znajduje). Jednakże pozorne „przesunięcie" ruchomego obiektu to nie wszystko. Jeśli przejeżdża on dostatecznie blisko, to czas potrzebny na dotarcie światła z różnych jego części do oka obserwatora może być istotnie różny. Oznacza to, że na fotografii jadącego roweru światło docierające do kliszy z przedniego koła musiało być wyemitowane w innej chwili niż światło z tylnego koła! Ta rozbieżność staje się oczywiście tym większa im szybciej porusza się rower. W przypadku Krainy Czarów, w której rowery poruszają się z prędkościami niemal równymi tamtejszemu c, efekt ten zaczyna odgrywać kluczową rolę i obraz roweru powinien stać się w niezwykły sposób zniekształcony. Chcielibyśmy teraz pokazać, w jaki sposób można nauczyć się rysować obiekty w relatywistycznym ruchu, oczywiście na przykładzie roweru. Skupmy się dla uproszczenia na obiektach płaskich poruszających się w swojej płaszczyźnie. Płaską krzywą możemy opisać za pomocą równania postaci

$$F(x,y)=0, \tag{1}$$

gdzie $F$ jest pewną funkcją dwóch zmiennych. Na przykład okrąg o promieniu $R$ i środku w początku układu współrzędnych jest opisany równaniem $x^2+y^2-R^2=0$. Rozważając zatem pewien obiekt, którego kontur jest opisany w spoczynku równaniem (1), możemy łatwo powiedzieć jaki będzie rzeczywisty kształt tego obiektu, jeśli będzie się on poruszać z prędkością $v$ wzdłuż osi $OX$. Wystarczy w tym celu przekształcić współrzędne zgodnie z transformacją Lorentza:

$$x \mapsto \frac{x-vt}{\sqrt{1-(v/\mathrm{c})^2}}. \tag{2}$$

**Rozwiązanie zadania F 597.**
Niech liczba płaszczyzn wynosi $i=4$, wtedy $C=3\varepsilon_0 S/d$ (trzy równoległe kondensatory). Analogicznie dla $i=6$: $C=5C_0$, gdzie $C_0=\varepsilon_0 S/d$ itd. Zatem, dla $2n$ płaszczyzn:

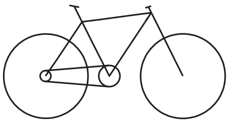
$$C=(2n-1)C_0=(2n-1)\varepsilon_0 S/d.$$

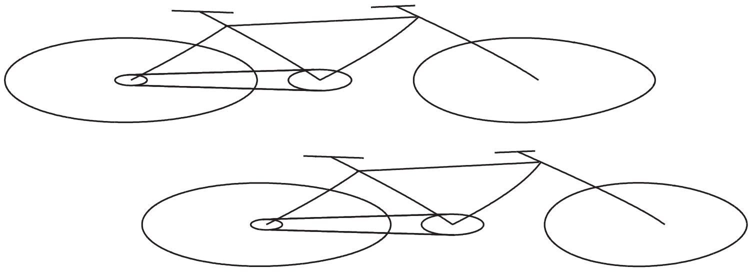
**Rozwiązanie zadania M 1027.**
Niech $A$ będzie zbiorem tych $n\in\mathbb{N}$, dla których Alicja ma strategię wygrywającą. Niech $B=\mathbb{N}\setminus A$. Wykażemy indukcyjnie, że $B=\{2^k : k=0,1,2,\ldots\}$. Łatwo zauważyć, że $1,2\in B$. Zakładamy, że

$$\{1,2,\ldots,n-1\}\cap B = \{2^k : k=0,1,2,\ldots,\ 2^k<n\}.$$

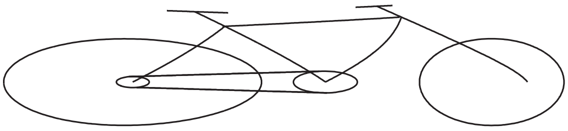
Jeśli $n=2^m$ dla pewnego $m$, to po pierwszym ruchu Alicji pozostanie na stole więcej niż $2^{m-1}$ i mniej niż $2^m$ cukierków. Z założenia indukcyjnego w tym momencie istnieje strategia wygrywająca dla rozpoczynającego, czyli dla Bartka. Zatem $2^m\in B$.

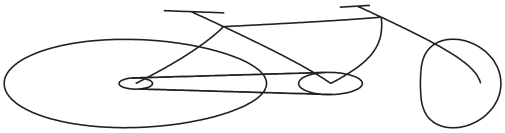
Jeśli $n$ nie jest powyższej postaci, to $n=2^m+k$, $k<\frac{n}{2}$. Wówczas Alicja w pierwszym ruchu może zjeść $k$ cukierków, pozostawiając Bartka z $2^m$ cukierkami w sytuacji przegranej. Zatem $n\in A$.



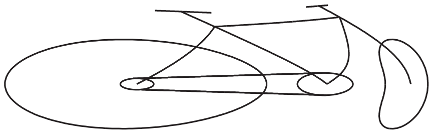


I to jest cała filozofia! Otrzymamy wówczas nowy, ruchomy kontur, który w dowolnej chwili $t$ opisany jest równaniem

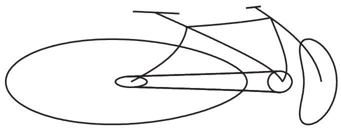


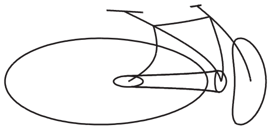


$$(3)\quad F\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-(v/\mathrm{c})^2}}, y\right) = 0.$$



W przypadku okręgu dostalibyśmy elipsę poruszającą się wzdłuż osi $OX$ i spłaszczoną w kierunku ruchu o odpowiedni czynnik. W książeczce George'a Gamowa, Pan Tompkins „widział" ruchome obiekty, których kształty opisywane były właśnie równaniami postaci (3), czyli bez żadnych zniekształceń, które w rzeczywistości musiałyby się pojawić. Postaramy się teraz odpowiedzieć na pytanie, jak owe zniekształcenia naprawdę wyglądają.





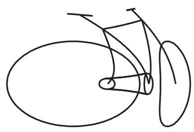
**Rozwiązanie zadania M 1028.**
Niech $A$ będzie zbiorem wszystkich par $(m,n)$, $m,n \in \mathbb{N}$, dla których istnieje strategia wygrywająca dla Alicji. Wykażemy przez indukcję względem $m+n$, że

$$(m,n) \in A \iff 2 \mid m \cdot n.$$

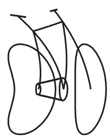
Oczywiście $(1,1) \notin A$. Rozważmy najpierw przypadek, kiedy na stole są grupy po $m$ i $n$ żetonów i $2 \mid m$. Jeśli Alicja odrzuci grupę z $n$ żetonami, a drugą podzieli na grupy liczebności 1 i $m-1$, to ponieważ $2 \nmid 1 \cdot (m-1)$, przy inteligentnej grze Alicji, na mocy założenia indukcyjnego, przegra Bartek. Zatem $(m,n) \in A$.

Jeśli $2 \nmid mn$, to przy dowolnym ruchu Alicji powstanie grupa składająca się z parzystej liczby żetonów. Wówczas wygra Bartek.

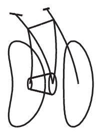
Najłatwiej będzie rozważyć fotografię poruszającego się obiektu, wykonaną aparatem umieszczonym w pewnej odległości $d$ od płaszczyzny ruchu i zwróconym w jej kierunku. Niech aparat znajduje się w punkcie $x=y=z=0$, a płaszczyzna opisana będzie równaniem $z=d$. Ponieważ światło porusza się zawsze z prędkością c niezależną od ruchu źródła lub obserwatora, to jeśli po wyemitowaniu przez obiekt w chwili $t$ i w punkcie $(x,y,z)$, dotarło do aparatu w chwili $t_{\mathrm{obs}}$, musi być spełniony związek:



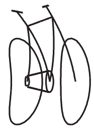
$$(4)\qquad \mathrm{c}(t_{\mathrm{obs}} - t) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$



Jeśli zatem fotografię wykonano w ustalonej chwili $t_{\mathrm{obs}}$, to rozwiązując układ równań (3) i (4) możemy znaleźć punkty, z których światło dotarło do aparatu. Najlepiej pozbyć się z równań czasu $t$, który nas nie interesuje. Wyznaczając $t$ z równania (4) i wstawiając do (3) dostajemy nowe równanie, którego właśnie szukaliśmy:

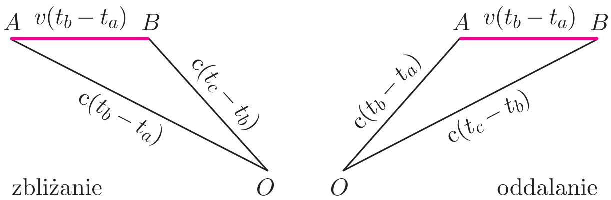


$$(5)\qquad F\left(\frac{x-(v/\mathrm{c})\left(\mathrm{c}t_{\mathrm{obs}} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-(v/\mathrm{c})^2}}, y\right) = 0.$$



Równanie to opisuje zarejestrowany przez aparat fotograficzny kontur poruszającego się ciała, którego kształt w spoczynku zadany jest równaniem (1). Występuje tu dodatkowy parametr $t_{\mathrm{obs}}$ opisujący moment wykonania zdjęcia, który możemy wybrać dowolnie. Posługując się analogiczną metodą, można bez trudu uogólnić powyższy wynik na ruch ciał trójwymiarowych, my jednak pozostaniemy przy najprostszym przypadku, żeby pokazać jak interesujące rzeczy wynikają z otrzymanego równania. Przykładowy kontur przedstawiający nieruchomy rower znajduje się na rysunku w lewym rogu. Zauważmy, że obraz roweru jest wyjątkowo prosty do przeanalizowania, ze względu na to, że składa się wyłącznie z odcinków i okręgów, opisywanych elementarnymi równaniami. Dlatego posługując się równaniem (5) możemy przeanalizować wygląd każdego z tych elementów osobno, a następnie złożyć otrzymane kształty w jedną całość.

Numeryczne rozwiązania tego równania ukazane są jako seria rysunków. Są to „fotografie” roweru jadącego z prędkością $v = 0{,}8$ c, wykonane z odległości od płaszczyzny ruchu równej średnicy koła roweru w kilku równych odstępach czasu. Przyznacie, że zdjęcia są niezwykle zaskakujące! Na trzecim od góry zdjęciu, środek przedniego koła akurat mijał obserwatora. Wcześniejsze zdjęcia ukazują jak tylna większa część roweru zbliża się, podczas gdy na kolejnych przednie fragmenty roweru już się oddalają od aparatu. Jak widać szybko poruszający się rower wydaje się być wydłużony, gdy się do nas zbliża, skrócony zaś, gdy oddala. Skrócenie rozmiarów roweru następuje w pobliżu aparatu i jest tym szybsze, im bliżej jest dany fragment. Właśnie dlatego koła mają przez kilka chwil kształt rogalika. Środek koła jest bliżej nas i szybciej się skraca niż pozostałe fragmenty. Efekt ten przypomina nieco akustyczne zjawisko Dopplera, znane na przykład z gwałtownego obniżenia wysokości dźwięku przejeżdżającej na sygnale karetki. W naszym relatywistycznym przypadku jest podobnie: przejeżdżająca karetka uległaby pozornie gwałtownemu skróceniu i spowolnieniu. Na serii „zdjęć” możemy zobaczyć także inne ciekawe zjawisko. Otóż rower zbliżający się do nas (taki jakim go widzimy) porusza się znacznie szybciej niż oddalający. Mijając aparat z pozoru gwałtownie zwalnia, mimo że rzeczywisty rower porusza się bez przyspieszenia. Dlaczego tak się dzieje? Rozważmy pewien punkt zbliżającego się do nas roweru. W chwili $t_a$ z punktu $A$ (patrz rysunek poniżej) zostaje wysłany foton, który dociera do obserwatora $O$ w chwili $t_b$, pokonując drogę $\mathrm{c}(t_b - t_a)$. W chwili $t_b$ punkt będąc w położeniu $B$ (po przebyciu drogi $v(t_b - t_a)$) wysyła do obserwatora kolejny foton, który rejestrowany jest w chwili $t_c$. Foton przebył drogę $\mathrm{c}(t_c - t_b)$. Zatem według obserwatora rozważany punkt w chwili $t_b$ znajdował się w położeniu $A$, zaś w chwili $t_c$ był w $B$. Obserwowana prędkość punktu $u$ jest więc równa stosunkowi pokonanej przez niego pozornie drogi do czasu, w którym to się odbyło:




$$u = \frac{v(t_b - t_a)}{(t_c - t_b)}$$

Gdy punkt się do nas zbliża $\mathrm{c}(t_b - t_a) > \mathrm{c}(t_c - t_b)$ (patrz rysunek), więc $u > v$.

W przypadku, gdy punkt się od nas oddala analogicznie mamy $\mathrm{c}(t_b - t_a) < \mathrm{c}(t_c - t_b)$, więc $u < v$.

Dzięki ściślejszej analizie tego zjawiska dowiadujemy się, że prędkość pozorna ciała poruszającego się z prędkością c/2 jest większa od c, gdy się do nas zbliża! Z kolei w przypadku oddalania się od nas prędkość pozorna nigdy nie przekroczy prędkości światła.

Na podstawie rysunków możemy się zatem przekonać, że Pan Tompkins obserwując mijający go rower, stwierdziłby, że najpierw rower wydaje się nienaturalnie wydłużony i zbliża się szybciej niż w rzeczywistości, a następnie, w momencie mijania, rower nagle wydaje się wyhamowywać i skracać wzdłuż kierunku ruchu, zupełnie jak gdyby był wykonany z gumy! Musimy oczywiście pamiętać, że jest to jedynie pozorny obraz, a w rzeczywistości rower cały czas jest lorentzowsko skrócony i porusza się ze stała prędkością. Te ciekawe wnioski dotyczą oczywiście nie tylko rowerów, ale wszystkich ciał będących w relatywistycznym ruchu. Dlatego możemy się domyślać, że Kraina Czarów, którą odwiedził Pan Tompkins musi być jeszcze niezwyklejsza, niż przedstawił to George Gamow.

**Rozwiązanie zadania F 598.**
Potencjały kuli i połączonej z nim powierzchni są jednakowe, a potencjał uziemionej płaszczyzny jest równy zeru. Ponieważ potencjał punktu leżącego w nieskończoności jest równy zeru, a za taki można z warunków zadania uważać daną kulę, okazuje się, że kulę i kondensator można uważać za połączone równolegle:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_0 - q}{C},$$

stąd

$$q = \frac{q_0}{1 + C/(4\pi\varepsilon_0 r)}.$$