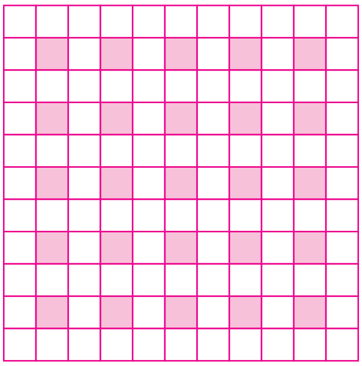
06/03 (66)

Γlimatias $_{n\to\infty}$

KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (4)

Tym razem rzecz będzie o marnotrawstwie. Przypuśćmy, że mamy szachownicę o boku $2n+1$ podzieloną na pola jednostkowe. Chcemy wyciąć z niej, **tnąc tylko po bokach pól**, możliwie najwięcej kwadratów o boku 2. Pytanie jest oczywiste: ile i jak?

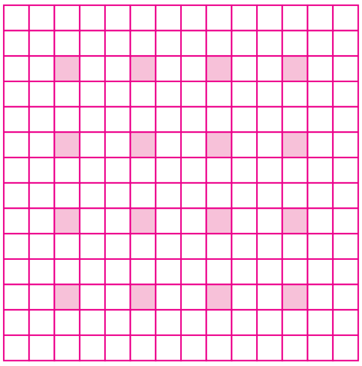
Z jednej strony potrafimy nawet z kwadratu o boku $2n$ wyciąć n^2 kwadratów. Z drugiej zaś strony po wycięciu n^2 kwadratów z szachownicy o boku $2n+1$ pozostaje niewykorzystana powierzchnia $4n+1$, która wystarczyłaby na dodatkowe n kwadratów, o ile umielibyśmy przeprowadzić podział w odpowiedni sposób. Niestety, ta powierzchnia zmarnować się **musi**. Pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1.



Rys. 1

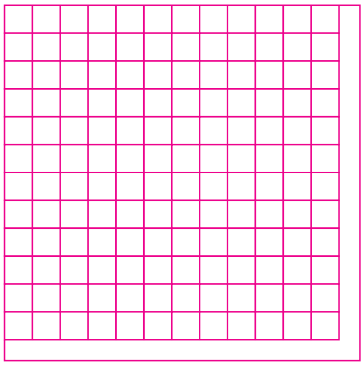
Wówczas pokolorowanych zostało n^2 pól i każdy kwadrat o boku 2 zawiera pokolorowane pole. Zatem wycięcie wiecej niż n^2 kwadratów nie jest możliwe.

Podobnie z szachownicy o boku $3n+2$ nie wytniemy więcej niż n^2 kwadratów o boku 3, co łatwo wynika z kolorowania przedstawionego na rysunku 2.

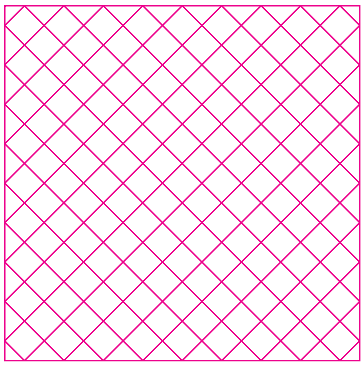


Rys. 2

Analogiczne rozumowanie pokazuje, że z szachownicy o boku $4n+3$ nie uzyskamy więcej niż n^2 kradratów o boku 4. Na przykład z szachownicy o boku 51 możemy wyciąć 144 kwadraty o boku 4 (rysunek 3). Jeżeli jednak nie będziemy się upierać, aby podział przebiegał wzdłuż linii szachownicy, można uzyskać 145 kwadratów, dokonując podziału jak na rysunku 4. Należy przy tym zwrócić uwagę, że $9\cdot 4\cdot \sqrt{2}\approx 50{,}91 < 51$.



Rys. 3



Rys. 4

Jeśli dopuścimy podziały nieprzebiegające wzdłuż linii szachownicy, zagadnienie znalezienia największej liczby możliwych do uzyskania kwadratów jest bardzo trudne. Udowodniono, że pewne nieregularne metody wycinania kwadratów pozwalają uzyskać z kwadratu o boku 100000,1 więcej niż 100000^2+6000 kwadratów jednostkowych.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (36)

Zadanie: Rozważamy ostrosłupy, których podstawą jest romb, a wszystkie ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.
Wyznaczyć wszystkie romby, które mogą być podstawą opisanego wyżej ostrosłupa.

Rozwiązanie: Niech romb $ABCD$ będzie podstawą, natomiast S wierzchołkiem ostrosłupa.
Ponieważ ściany boczne ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi, wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości, a co za tym idzie, punkty A, B, C, D leżą na sferze o środku S i promieniu równym długości krawędzi bocznej. Zatem romb $ABCD$ jest wpisany w okrąg będący przecięciem tej sfery i płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Na rombie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest on kwadratem, tak więc romb spełniający warunki zadania musi być kwadratem.
Zbudowanie ostrosłupa o podstawie kwadratowej i równoramiennych ścianach bocznych nie nastręcza żadnych trudności.

Odpowiedź: Rombami spełniającymi warunki zadania są jedynie kwadraty.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl