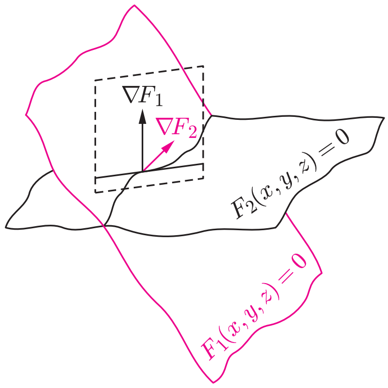
Wszystkie nasze obserwacje prowadzą zatem do wniosku, że ekstremów funkcji V przy warunku $F(x,y,z)=0$ należy szukać wśród takich punktów, dla których

$$(*)\qquad \nabla V = \lambda \nabla F,$$

gdzie λ to pewna liczba rzeczywista, zwana mnożnikiem Lagrange'a. Wystarczy chwila zastanowienia, by zrozumieć, dlaczego tak jest. Otóż maksimum (lub minimum) funkcji V na powierzchni $F(x,y,z)=0$ (lub $F(x,y)=0$) może być osiągane tylko wtedy, gdy w każdym kierunku **stycznym do powierzchni** liniowy wzrost funkcji V znika. Innymi słowy, liniowy wzrost funkcji V może mieć tylko składową prostopadłą do powierzchni $F=0$, czyli równoległą do gradientu F.

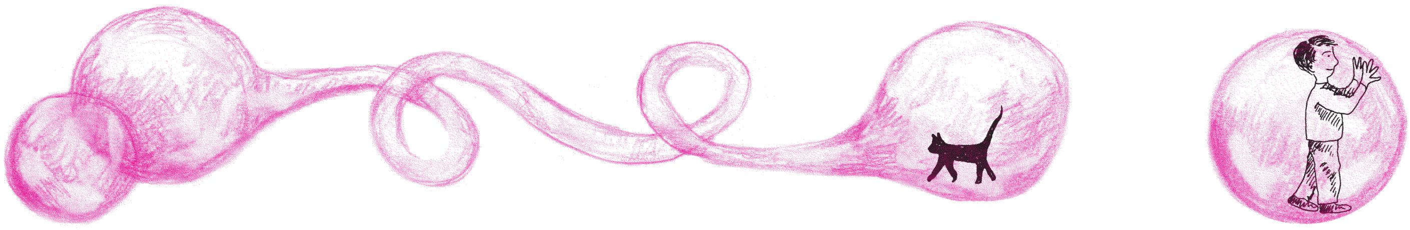


Rys. 3

No dobrze, ale dlaczego w tytule pojawiły się mnożniki, a nie mnożnik Lagrange'a? Nietrudno to wytłumaczyć: przecież możemy nałożyć więcej niż jeden warunek na poszukiwane punkty i szukać ekstremów wśród punktów (x,y,z), dla których $F_1(x,y,z)=0$ oraz $F_2(x,y,z)=0$ dla pewnych funkcji F_1 i F_2. Odpowiada to szukaniu ekstremów na przecięciu pewnych powierzchni. Spoglądając na rysunek 3, widzimy, że gradient funkcji V nie może mieć składowej stycznej do krzywej l, musi zatem leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez gradient funkcji F_1 i gradient funkcji F_2. Innymi słowy, musi być ich liniową kombinacją, tzn.

$$(**)\qquad \nabla V = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2,$$

gdzie λ_1 i λ_2 to pewne liczby rzeczywiste zwane mnożnikami Lagrange'a. Czytelnik obdarzony n-wymiarową wyobraźnią (dla $n \geqslant 4$) z łatwością wskaże przykłady, gdy mnożników Lagrange'a potrzeba będzie jeszcze więcej.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 595. Oszacować czas zmniejszenia się o połowę ciśnienia powietrza wewnątrz sztucznego satelity Ziemi, mającego w ścianie otwór o średnicy rzędu 1 centymetra.
Rozwiązanie na str. 9

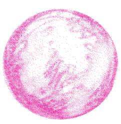
F 596. Ile ruchów pompki potrzeba do nadmuchania piłki futbolowej?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1024. Znaleźć największą wartość wyrażenia

$$xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$

gdzie $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$.
Rozwiązanie na str. 16



M 1025. Suma nieujemnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wynosi 1. Jaką maksymalną wartość może przyjąć

$$x_1 \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x_n}\ ?$$

Rozwiązanie na str. 5

M 1026. Liczby $x_1, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ są dodatnie oraz $k<n$. Załóżmy, że liczby $x_{k+1}, \ldots, x_n$ są ustalone. Jak należy wybrać $x_1, \ldots, x_k$, by zminimalizować $\sum\limits_{i \neq j} \dfrac{x_i}{x_j}$?
Rozwiązanie na str. 5