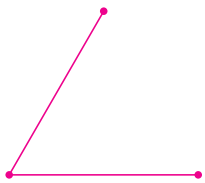
Zadania trudniejsze od innych

Jarosław GÓRNICKI

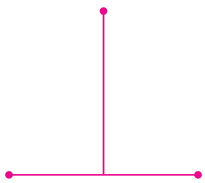
Przekazując wiedzę kolejnym pokoleniom, wybieramy takie umiejętności, fakty, które mają duży walor użytkowy lub poznawczy. Pewne z nich wpisują się w kanon naszej kultury, wzbogacając tych, którzy ją poznają. Na specjalną uwagę zasługują problemy, które mają duże znaczenie praktyczne i nie zostały dotychczas rozwiązane w zadowalający sposób. Czy takie problemy w ogóle istnieją? O tak, i jest ich wiele. Kilka z nich prezentujemy poniżej. Punktem wyjścia będą proste obserwacje z elementarnej geometrii, które bardzo szybko doprowadzą nas do trudnych i wciąż aktualnych zagadnień. Rozpoczniemy od następującego zadania.

Zadanie 1. *Połącz wierzchołki trójkąta równobocznego odcinkami, których łączna długość jest możliwie najmniejsza.*

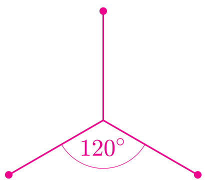
Na kolejnych rysunkach (rys. 1, 2, 3) prezentujemy trzy propozycje rozwiązań, w których każda następna jest lepsza od poprzedniej.



Rys. 1



Rys. 2

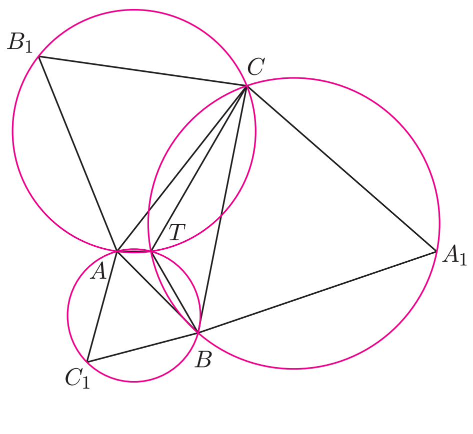


Rys. 3

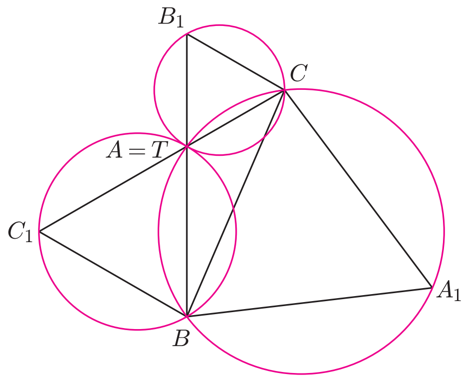
Jak wykazać, że ostatnia propozycja jest rozwiązaniem zadania?

W dyskusji nad rozwiązaniem tego zadania dla dowolnego trójkąta przydatna będzie własność, którą zauważył włoski fizyk i matematyk Evangelista Torricelli (1608–1647) [uczeń Galileusza, wykazał istnienie ciśnienia atmosferycznego, skonstruował barometr]:

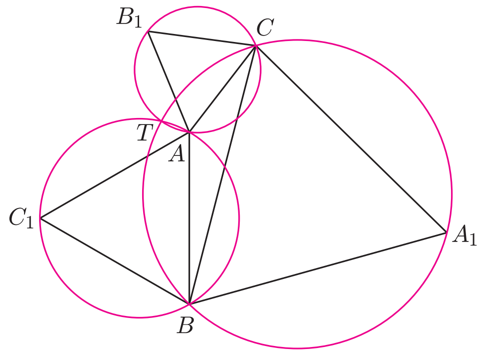
Jeśli na zewnątrz dowolnego trójkąta, na jego bokach, zbudujemy trójkąty równoboczne i na każdym z nich opiszemy okrąg, to tak otrzymane trzy okręgi przetną się w jednym punkcie (rys. 4, 5, 6).



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Niezwykłość tej obserwacji polega na tym, że punkt jednoznacznie wyznaczają dwa przecinające się okręgi, tu zaś w jednym punkcie spotykają się trzy okręgi zwane *okręgami Torricellego*. Wspólny punkt ich przecięcia nazywamy *punktem Torricellego*. Wykazanie opisanej własności (zwanej również *twierdzeniem Napoleona*, gdyż Napoleon I Bonaparte (1769–1821) też ją odkrył) nie jest trudne. Uzasadnienie można oprzeć na następującej szkolnej obserwacji [12, str. 130]: *suma miar kątów wpisanych w okrąg, opartych na tej samej cięciwie, lecz mających wierzchołki po przeciwnych stronach cięciwy, jest równa* π.

Okręgi opisane na trójkątach równobocznych CB_1A i AC_1B przecinają się w punkcie T. Wykażemy, że punkt T należy również do okręgu opisanego na trójkącie równobocznym BA_1C.

Gdy $|\sphericalangle A| < \frac{2}{3}\pi$ (rys. 4), to

$$|\sphericalangle BTC| = 2\pi - \big(|\sphericalangle BTA| + |\sphericalangle ATC|\big) = \\ = 2\pi - \big(\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{2}{3}\pi\big) = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Gdy $|\sphericalangle A| = \frac{2}{3}\pi$ (rys. 5), to $A = T$.

Gdy $|\sphericalangle A| > \frac{2}{3}\pi$ (rys. 6), to

$$|\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle BTA| + |\sphericalangle ATC| = \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Zatem, w każdym z rozpatrywanych przypadków $|\sphericalangle BTC| = \frac{2}{3}\pi$ i jest to kąt oparty na tej samej cięciwie co kąt BA_1C, którego miara wynosi $\frac{1}{3}\pi$. Oznacza to, że punkty B, T, C, A_1 leżą na wspólnym okręgu opisanym na trójkącie równobocznym BA_1C.

Aby dla danego trójkąta wyznaczyć punkt Torricellego, nie musimy rysować wskazanych okręgów. Punkt T otrzymamy w wyniku przecięcia się dwóch spośród prostych AA_1, BB_1, CC_1. Na przykład, punkty B, T, B_1 leżą na jednej prostej, gdyż $|\sphericalangle BTC| = \frac{2}{3}\pi$, $|\sphericalangle CTB_1| = |\sphericalangle CAB_1| = \frac{1}{3}\pi$, a zatem $|\sphericalangle BTB_1| = \pi$. Można również wykazać [11, str. 140], że odcinki AA_1, BB_1, CC_1 mają jednakową długość równą

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2S\sqrt{3}},$$

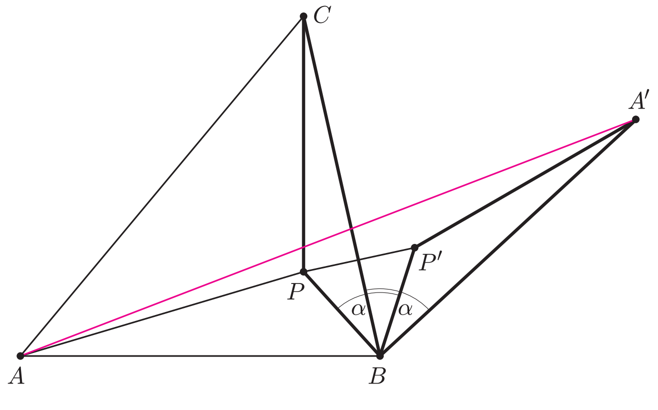
gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta ABC, S zaś jego polem (która to wielkość, zgodnie ze wzorem Herona, też jest funkcją długości boków trójkąta).

Punkt Torricellego pojawił się w matematyce (fizyce(?)) w związku z problemem ekstremalnym postawionym przez Bonawenturę Cavalieriego (1598–1647) (jego autorstwo przypisuje się również Pierrowi de Fermat (1601–1665)).

Problem. *Połącz trzy punkty odcinkami, których łączna długość jest możliwie najmniejsza.*

Jedną z trudności tego problemu (**Zadanie 1** jest jego szczególnym przypadkiem) jest to, że odpowiedź zależy od „rodzaju” trójkąta, jaki tworzą zadane punkty.

Przypadek I. Wskażemy najpierw rozwiązanie dla trójkątów, w których punkt Torricellego jest ich punktem wewnętrznym, czyli dla trójkątów o kątach wewnętrznych mniejszych niż $\frac{2}{3}\pi$. Wówczas z punktu Torricellego T każdy bok takiego trójkąta ABC widać pod kątem $\frac{2}{3}\pi$. Oto błyskotliwe rozwiązanie Hofmanna [5]. Rozważmy dowolny punkt wewnętrzny P trójkąta ABC, dla którego $\max\{|\sphericalangle A|, |\sphericalangle B|, |\sphericalangle C|\} < \frac{2}{3}\pi$. Punkt P łączymy z wierzchołkami A, B, C i obracamy trójkąt CPB o kąt $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ wokół punktu B do położenia trójkąta $A'P'B$.



Rys. 7

Wówczas

$$|AP| + |BP| + |CP| = |AP| + |P'P| + |A'P'|$$

i ostatnia suma jest najmniejsza, gdy punkty P oraz P' należą do odcinka AA'.

Wtedy

$|\sphericalangle APB| = \pi - |\sphericalangle BPP'| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$,

$|\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle A'P'B| = \pi - |\sphericalangle PP'B| = \frac{2}{3}\pi$.

Oznacza to, że z punktu P każdy z boków rozważanego trójkąta jest widoczny pod kątem $\frac{2}{3}\pi$. Zatem w tym przypadku optymalne rozwiązanie dają odcinki łączące punkt Torricellego z wierzchołkami trójkąta.

Przypadek II. Gdy punkty A, B, C tworzą trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych ma miarę równą co najmniej $\frac{2}{3}\pi$, to rozwiązaniem problemu jest suma długości odcinków wychodzących z wierzchołka tego kąta. Uzasadnienie tego jest bardziej kłopotliwe.

Niech trójkąt ABC będzie taki, że $|\sphericalangle C| \geqslant \frac{2}{3}\pi$ oraz $P \neq C$. Wykażemy, że wówczas

$$|AC| + |CB| < |AP| + |BP| + |CP|.$$

Wprowadźmy oznaczenia: $|\sphericalangle ACB| = \gamma \geqslant \frac{2}{3}\pi$, $|\sphericalangle ACP| = \varphi$, $|\sphericalangle BCP| = \psi$, F niech będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC, a G rzutem prostokątnym punktu P na prostą CB. Wówczas

$$|AC| = |AF| + |CP|\cdot\cos\varphi, \quad |BC| = |BG| + |CP|\cdot\cos\psi,$$

czyli

$$|AC| + |BC| = |AF| + |BG| + |CP|\cdot(\cos\varphi + \cos\psi) =$$

$$= |AF| + |BG| + |CP|\cdot 2\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

Ponieważ jeden z powyższych cosinusów ma wartość $\cos\frac{\gamma}{2}$ (to, który z nich, zależy od tego, czy P jest punktem wewnętrznym kąta BCA) i $\gamma \geqslant \frac{2}{3}\pi$, więc $\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. W konsekwencji

$$|AC| + |BC| \leqslant |AF| + |BG| + |CP|.$$

Uwzględniając, że $|AF| < |AP|$, $|BG| < |BP|$, otrzymujemy ostatecznie

$$|AC| + |CB| < |AP| + |BP| + |CP|.$$

Oznacza to, że w przypadku trójkątów, których jeden z kątów wewnętrznych ma miarę większą niż $\frac{2}{3}\pi$, mamy zupełnie nową sytuację – punkt Torricellego nie wskazuje optymalnego rozwiązania problemu!

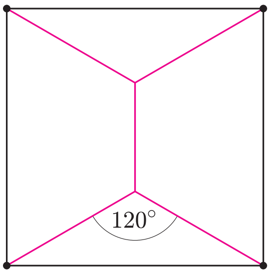
Omawiane zagadnienie ma wiele różnych uogólnień często zwanych *problemem sieci minimalnej.* Najbardziej kłopotliwym wśród nich jest *problem Steinera* (Jacob Steiner (1796–1863)).

Problem Steinera. *Połącz n punktów płaszczyzny spójnym układem odcinków tak, aby ich łączna długość była możliwie najmniejsza.*

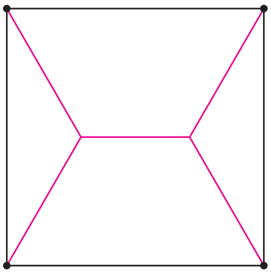
Oczywiste jest, że rozwiązanie tego problemu zależy od położenia danych punktów. Pewne trudności ujawniają się już, gdy próbujemy znaleźć minimalną sieć dla czterech punktów. Przypatrzmy się rozwiązaniu następującego zadania [7, zad. 75; *Delta* 9/1987, zad. 151].

Zadanie 2. *Połącz wierzchołki kwadratu odcinkami tak, by ich łączna długość była możliwie najmniejsza.*

Ideę rozwiązania można odczytać z rysunku 8. Rysunek 9 pokazuje, że otrzymane rozwiązanie nie jest jednoznaczne.

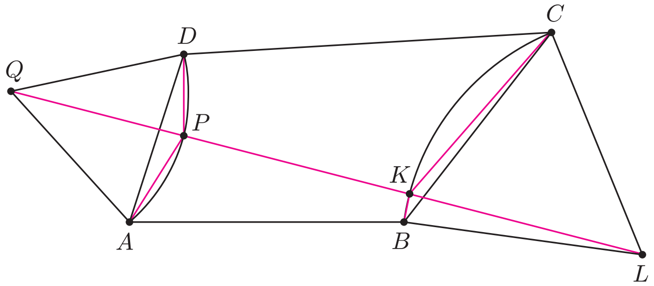


Rys. 8



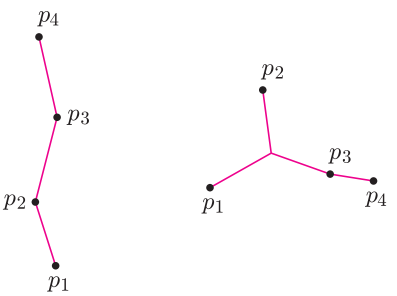
Rys. 9

Przy innym położeniu czterech punktów na płaszczyźnie zadanie się komplikuje. Na przykład dla czworokąta o kątach wewnętrznych nie większych niż $\frac{2}{3}\pi$ sieć minimalną znajdujemy, wybierając tę parę przeciwległych boków, dla których odległość ich środków jest największa i wykonując konstrukcję przedstawioną na rysunku 10 [1, 2].

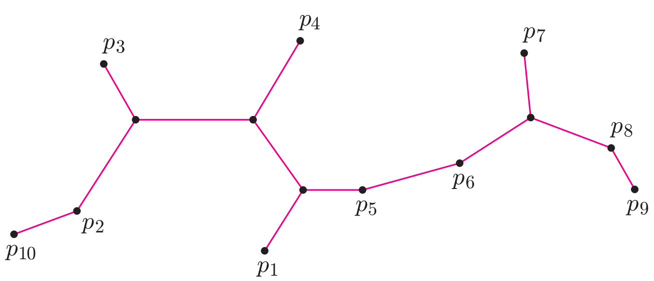


Rys. 10

W innych przypadkach sieć minimalna może mieć inny kształt (rys. 11). Dla większej liczby punktów problem się komplikuje, rysunek 12 przedstawia minimalną sieć dla wskazanych 10 punktów.

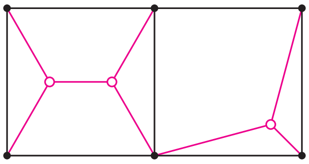


Rys. 11

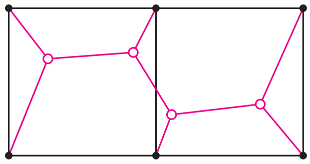


Rys. 12

Pomysł, że do rozwiązania problemu Steinera można dojść „krok po kroku” – najpierw (w znany już sposób) znajdujemy rozwiązanie dla trzech lub czterech punktów, a następnie łączymy otrzymane sieci, nie jest dobry. Wyznaczona w ten sposób sieć dla 6 punktów będących wierzchołkami kwadratów (rys. 13) jest dłuższa od sieci przedstawionej na rysunku 14.

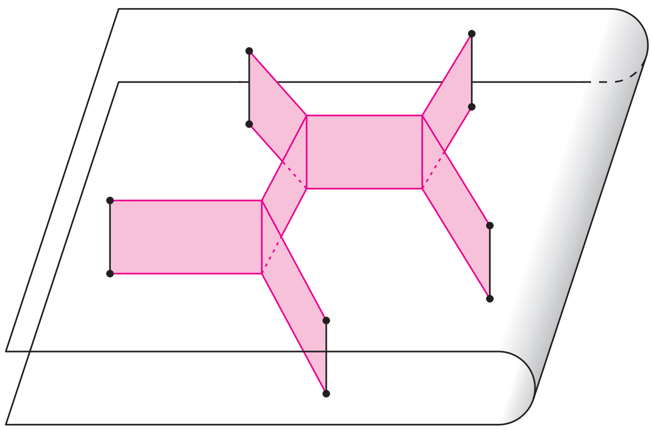


Rys. 13



Rys. 14

Oznacza to, że rozwiązanie problemu Steinera wymaga podejścia globalnego. Dla niedużej liczby punktów sieć minimalną można wyznaczyć doświadczalnie [2], korzystając z własności błony mydlanej, która dzięki działaniu napięcia powierzchniowego jest w stanie stałej równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy ma minimalne pole (rys. 15).



Rys. 15

W tej sytuacji naturalne jest pytanie: czy istnieje jakiś algorytm, który w skończonej liczbie kroków wskazywałby rozwiązanie problemu Steinera? Odpowiedź na nie jest pozytywna. Pierwszy taki algorytm podał w 1961 roku Z.A. Melzak [6] (od tego czasu tylko nieznacznie usprawniony, zob. [9, 10]). Sukces ten jest jednak pozorny, gdyż możliwości jego rzeczywistego wykorzystania są bardzo ograniczone. Algorytm ten jest po prostu nieefektywny.
Na przykład dla $n = 7$ należy się liczyć z koniecznością zbadania 62370 sieci. W związku z tym nasza uwaga musi być skierowana nie tylko w stronę pytania o istnienie algorytmu, lecz również na możliwość jego efektywnego wykorzystania – rozwiązanie problemu za rozsądną cenę (czyli w możliwym do zaakceptowania czasie). Takimi zagadnieniami zajmuje się *teoria złożoności obliczeniowej* [3, 4].

Spróbujmy pokrótce wyjaśnić, o co chodzi. Jeśli czas na wykonanie w algorytmie obliczeń dla n parametrów uzależniony jest od liczby n wielomianowo, na przykład wzorem $5n^3$, to mówimy, że taki algorytm daje wynik w czasie *wielomianowym*. Takie algorytmy uważa się za dobre, a problem, który one rozwiązują, za łatwy. Na przykład: dodawanie dwóch liczb

n-cyfrowych wymaga nie więcej niż $2n$ operacji dodawania na cyfrach, mnożenie takich liczb nie wymaga więcej niż $3n^2$ operacji. Są to więc zadania łatwe. Jeśli jednak w algorytmie czas na wykonanie obliczeń dla n parametrów rośnie piorunująco szybko, na przykład wykładniczo jak 2^n (lub jeszcze gorzej, jak $n!$ czy n^n), to takie zadanie jest praktycznie niewykonalne. W tym przypadku, dla $n = 70$, nawet gdybyśmy sprawdzali 1000000 przypadków co sekundę, to i tak potrzebowalibyśmy ponad 300000 wieków dla sprawdzenia wszystkich 2^{70} przypadków. Problemy, dla których znamy tylko algorytmy niedające wyników w czasie wielomianowym, uważa się za trudne.
Jest jednak nowy kłopot, jak dla danego problemu pokazać, że dla jego rozwiązania nie istnieje algorytm o wielomianowym czasie realizacji. Innymi słowy, jak pokazać, że dany problem jest trudny? Niestety, tego jeszcze nie potrafimy zrobić, choć znamy około 1000 zadań, które na dzień dzisiejszy uznajemy za trudne. Jednym z takich zadań jest wspomniany wyżej problem Steinera.

Trudnym zadaniem jest również **problem komiwojażera** (sformułowany przez Karla Mengera w 1930 roku): *znajdź najkrótszą drogę przechodzącą przez każde z n danych miast, która kończy się w mieście, w którym się rozpoczęła.* Ponieważ liczba wszystkich tras wynosi $n!$, więc dla dużych n wyznaczenie drogi, rozważając przypadek po przypadku, jest zadaniem beznadziejnie nieefektywnym.

Tego typu problemy (zwane też problemami szeregowania) spotykamy w wielu sytuacjach praktycznych: zbieranie pieniędzy z aparatów telefonicznych, obchód przez strażnika ustalonych miejsc w fabryce, trasy dostawy towaru do różnych sklepów w mieście itd. Wszechstronną analizę tego problemu, jego różnych wariantów oraz innych problemów o podobnym charakterze można znaleźć w pracy [8].

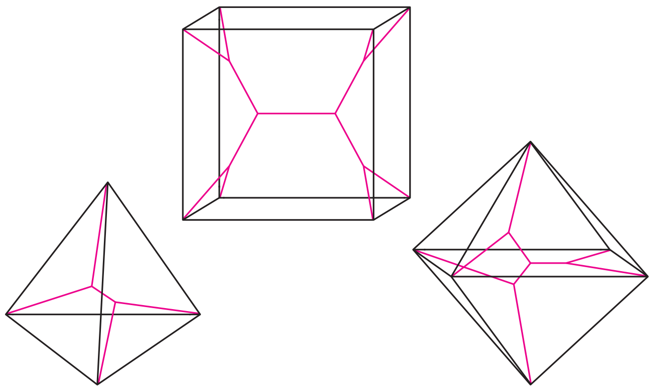
Wiele praktycznych zastosowań ma również **problem pakowania**: *wypełnić plecak różnymi przedmiotami o wartościach p_i i wagach w_i, dokonując takiego wyboru, aby wartość załadowanych do plecaka przedmiotów była możliwie największa i oczywiście nie przekroczyła udźwigu plecaka.*

Oto przykład prostego geometrycznego wariantu problemu pakowania: *ile niezachodzących na siebie kwadratów jednostkowych można umieścić wewnątrz dużego kwadratu o boku $s = N + \frac{1}{10}$?* Dotychczas wiadomo, że istnieją takie upakowania, które pozostawiają niepokrytą powierzchnię równą prawie $s^{\frac{3-\sqrt{3}}{2}} \approx s^{0,634}$ (wydaje się, że nie jest to najlepsze oszacowanie, obiecującą wielkością jest $s^{0,5}$). Na przykład: dla kwadratu o boku $s = 100000{,}1$ upakowanie konwencjonalne mieści 10^{10} kwadratów, pozostawiając niepokrytą powierzchnię nieco większą niż 20000 kwadratów jednostkowych. Ponieważ jednak $100000{,}1^{0,634} \approx 1479{,}11$, więc dla rozważanego kwadratu istnieje (!) niekonwencjonalne upakowanie mieszczące jeszcze dodatkowo ponad 18500 kwadratów jednostkowych! Tyle teoria, jak jednak wykonać to w praktyce?

Trudne są również tzw. **problemy pokryciowe**, które od strony praktycznej dotyczą takich zagadnień jak: planowanie lotów personelu lotniczego, określenie okręgów wyborczych, optymalne przemieszczanie towarów od przedsiębiorstw przez magazyny do pewnej liczby odbiorców.

Dla żadnego z wyżej wskazanych problemów nie znaleziono dotychczas efektywnego (tzn. o czasie wielomianowym) algorytmu ich rozwiązania. Jest więc nad czym rozmyślać...

Na zakończenie powróćmy jeszcze do problemu sieci minimalnych dla kilku punktów, ale umieszczonych nie na płaszczyźnie, lecz w przestrzeni. Rysunek 16 prezentuje sieci minimalne dla wierzchołków czworościanu foremnego, sześcianu, ośmiościanu foremnego.



Rys. 16

Mam nadzieję, że dopracowanie szczegółów i wykazanie poprawności prezentowanych rozwiązań nie będzie kłopotliwe, a może nawet dostarczy trochę przyjemności.

LITERATURA:

[1] N.C. Chi, *Sieć dróg dla czterech miejscowości*, Delta **10**/1988, 12–13.
[2] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.
[3] R.L. Graham, *Kombinatoryczna teoria szeregowania, w: Matematyka współczesna, dwanaście esejów* (red.: L.A. Steen), WNT, Warszawa, 1983, 200–229.
[4] D. Harel, *Rzecz o istocie informatyki.* Algorytmika, WNT, Warszawa, 1992.
[5] J.E. Hofmann, *Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe,* Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **60**(1929), 22–23.
[6] Z.A. Melzak, *On the problem of Steiner,* Canad. Math. Bull. **4**(1961), 143–148.
[7] H. Steinhaus, *100 zadań*, Warszawa, 1993.
[8] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik, *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, 1999.
[9] P. Winter, *An algorithm for the Steiner problem in the Euclidean plane*, Networks **15**(1985), 323–345.
[10] P. Winter, *Steiner problem in networks: a survey*, Networks **17**(1987), 129–176.
[11] S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa, 1964.
[12] J. Zydler, *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1997.