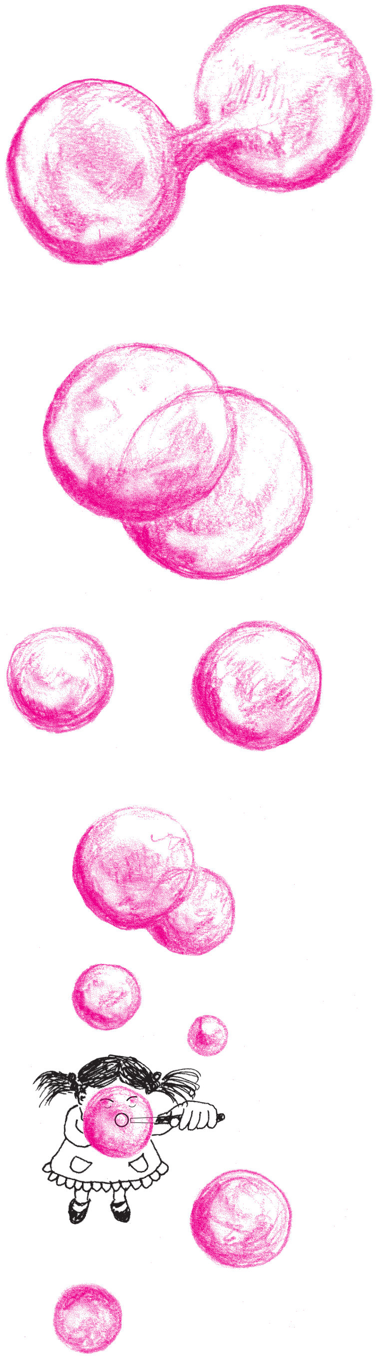
O zasadzie minimum

Piotr ZAKRZEWSKI



Zasada minimum (dla liczb naturalnych) orzeka, iż w każdym niepustym podzbiorze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ istnieje liczba najmniejsza. Ten intuicyjnie oczywisty fakt wyraża bardzo ważną własność zbioru $\mathbb{N}$, gdyż blisko wiąże się z innym kluczowym twierdzeniem dotyczącym tego zbioru, a mianowicie z zasadą indukcji matematycznej. Przeanalizujmy ten związek w ogólniejszej sytuacji. Niech A będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

- Powiemy, że dla zbioru A prawdziwa jest zasada minimum, jeśli jest on niepusty i w każdym jego niepustym podzbiorze istnieje liczba najmniejsza.
- Powiemy, że dla zbioru A prawdziwa jest zasada indukcji, jeśli istnieje w nim liczba najmniejsza a_0 oraz dowolny zbiór $X \subset A$, spełniający warunki:
  (1) $a_0 \in X$,
  (2) dla każdej liczby $a \in A$ większej od a_0, z tego, że wszystkie liczby $x \in A$, mniejsze od a, należą do X, wynika, że $a \in X$,
  jest równy całemu zbiorowi A.

Obie powyższe zasady są naturalnymi uogólnieniami swoich klasycznych wersji dla zbioru liczb naturalnych. W szczególności, zasada indukcji dla $\mathbb{N}$ to po prostu jedna z postaci zasady indukcji matematycznej. Ogólnie, zasadę indukcji dla zbioru A stosuje się w sytuacji, gdy chcemy udowodnić, że każdy element tego zbioru ma jakąś rozpatrywaną własność W – należy wówczas właśnie wykazać, że zbiór $X = \{x \in A :\ W(x)\}$, złożony z tych wszystkich elementów zbioru A, które mają własność W, jest równy zbiorowi A. W tym celu sprawdzamy, że najmniejszy element a_0 zbioru A ma własność W (tzn. $a_0 \in X$), a następnie bierzemy dowolny element $a \in A$, większy od a_0, przyjmujemy jako założenie indukcyjne, że każda liczba x ze zbioru A, mniejsza od a, ma dowodzoną własność (tzn. $x \in X$) i w końcu korzystając z tego założenia wykazujemy, że własność tę ma również liczba a (tzn. $a \in X$).

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, dla jakich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych prawdziwe są sformułowane wyżej zasady. Zacznijmy od zasady minimum, gdyż sprawdzenie, czy dany zbiór ją spełnia, jest na ogół łatwe.

Zasada ta, oczywiście, jest prawdziwa dla każdego niepustego podzbioru zbioru $\mathbb{N}$, a także dla dowolnego niepustego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{R}$. Oto kilka kolejnych przykładów zbiorów, spełniających zasadę minimum:

(1) $A_1 = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$,
(2) $A_2 = \{m - \frac{1}{n} : m \in \{1,2,3\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$,
(3) $A_3 = \{m - \frac{1}{n} : m,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Sprawdźmy, na przykład, że zasada minimum jest prawdziwa dla zbioru A_3 – stąd już będzie wynikało, że jest ona również prawdziwa dla zbiorów A_1 i A_2, gdyż zawierają się one w zbiorze A_3.

Niech więc X będzie niepustym podzbiorem zbioru A_3. Stosując dwukrotnie „zwykłą” zasadę minimum dla zbioru liczb naturalnych, znajdujemy najpierw liczbę

$$m_0 = \min\Big\{m \in \mathbb{N} :\ m - \tfrac{1}{n} \in X \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\Big\},$$

a następnie liczbę

$$n_0 = \min\Big\{n \in \mathbb{N} :\ m_0 - \tfrac{1}{n} \in X\Big\}.$$

Jest oczywiste, że liczba $m_0 - \frac{1}{n_0}$ jest najmniejszym elementem zbioru X.

Innymi słowy, jeśli liczbę $m - \frac{1}{n}$ oznaczymy za pomocą pary jej „współrzędnych” $\langle m, n\rangle$, to znalezienie najmniejszej spośród liczb tej postaci, należących do zbioru X, polega na wskazaniu tej z odpowiadających im par, która jest pierwsza w porządku „alfabetycznym” – m_0 jest najmniejszą możliwą pierwszą współrzędną, a n_0 najmniejszą spośród drugich współrzędnych rozpatrywanych par o pierwszej współrzędnej m_0.

Zasady minimum nie spełniają natomiast zbiory takie jak $\mathbb{R}$, zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ ani zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, gdyż w żadnym z nich nie ma liczby najmniejszej. Nie jest ona też prawdziwa dla żadnego przedziału domkniętego $[a, b]$, gdzie $a < b$ (w przedziale otwartym (a, b) nie ma liczby najmniejszej), a zatem również dla żadnego zbioru zawierającego taki przedział.

Ogólniej, zasada minimum nie jest prawdziwa dla żadnego nieprzeliczalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$. Istotnie, można udowodnić, że jeśli zbiór A jest nieprzeliczalny, to jego podzbiór Y, zdefiniowany w następujący sposób

$$Y = \{a \in A: \text{ zbiór } (-\infty, a) \cap A \text{ jest nieprzeliczalny}\}$$

jest niepusty i nie ma elementu najmniejszego.

Co z prawdziwością zasady indukcji dla zbiorów rozważanych powyżej? Można by w każdym przypadku sprawdzić, że jest ona prawdziwa, jeśli zbiór spełnia zasadę minimum, i fałszywa w przeciwnym razie. Wynika to jednak z ogólnego twierdzenia, ukazującego sygnalizowany na początku artykułu związek indukcji z zasadą minimum.

Twierdzenie. *Dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

(1) *dla zbioru A prawdziwa jest zasada indukcji,*
(2) *dla zbioru A prawdziwa jest zasada minimum.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że dla danego zbioru A prawdziwa jest zasada indukcji; wykażemy, że jest też dla niego prawdziwa zasada minimum. Niech więc Y będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru A; chcemy stwierdzić, że zbiór ten ma element najmniejszy. Przypuśćmy więc, że jest przeciwnie. Wyniknie stąd, wbrew przyjętemu założeniu, że Y jest zbiorem pustym i otrzymana w ten sposób sprzeczność zakończy tę część dowodu.

Zastosujemy zasadę indukcji dla zbioru A do jego podzbioru X, złożonego z tych liczb ze zbioru A, które nie należą do Y. Niech a_0 będzie najmniejszą liczbą w zbiorze A. Mamy

(1) $a_0 \in X$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy $a_0 \in Y$ i liczba a_0 byłaby najmniejszym elementem zbioru Y, wbrew przyjętemu założeniu;
(2) niech $a \in A$ będzie dowolną liczbą większą od a_0. Zróbmy założenie indukcyjne, że każda liczba $x \in A$, mniejsza od a, należy do zbioru X. To jednak znaczy, że żadna z nich nie należy do zbioru Y, więc gdyby liczba a do niego należała, to byłaby jego najmniejszym elementem, znowu wbrew temu, co założyliśmy. Zatem $a \in X$.

Na mocy zasady indukcji dla zbioru A wnioskujemy z powyższego, że $X = A$, ale to znaczy, że zbiór Y jest pusty.

Załóżmy teraz, że dla danego zbioru A prawdziwa jest zasada minimum; wykażemy, że jest też dla niego prawdziwa zasada indukcji. Niech więc a_0 będzie najmniejszym elementem zbioru A i weźmy dowolny zbiór $X \subset A$, spełniający warunki:

(1) $a_0 \in X$,
(2) dla każdej liczby $a \in A$, większej od a_0, z tego, że wszystkie liczby $x \in A$, mniejsze od a, należą do X, wynika, że $a \in X$.

Chcemy wykazać, że $X = A$. Przypuśćmy więc, że jest przeciwnie, tzn. zbiór Y, złożony z tych elementów zbioru A, które nie należą do X, jest niepusty. W takim razie na mocy zasady minimum dla zbioru A w zbiorze Y jest liczba najmniejsza a. Wówczas $a > a_0$, gdyż $a_0 \in X$ na mocy warunku (1). Ponadto wszystkie liczby $x \in A$, mniejsze od a, należą do zbioru X, ponieważ a jest najmniejszą liczbą, która do niego nie należy. To jednak, wobec warunku (2) implikuje, że $a \in X$, czyli $a \notin Y$ i otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Powyższą dyskusję związku zasady minimum z zasadą indukcji można w znaczący sposób uogólnić. Jest to punkt wyjścia dla bardzo ciekawej teorii tzw. zbiorów dobrze uporządkowanych.

Rozwiązanie zadania F 595.
Objętość gazu, wylatującego przez otwór o powierzchni S z prędkością v w czasie t, wynosi $vSt \sim V/2$. Prędkość wylotu powietrza można oszacować albo z jego temperatury:

$$mv^2/2 \sim 3kT/2 = 3RT/(2N_A),$$

albo po prostu przyrównać prędkość gazu do prędkości dźwięku $c \approx 3 \cdot 10^2$ m/s. Niech objętość satelity $V \approx 1$ m^3 i $S \approx 10^{-4}$ m^2, a $v \approx 3 \cdot 10^2$ m/s. Wtedy $t \sim V/(2vS) \approx 10$ s.