Lemat Kuratowskiego–Zorna

Wojciech GUZICKI

W dowodach wielu twierdzeń matematycznych wykorzystuje się zbiory maksymalne w pewnych rodzinach zbiorów. Przyjrzymy się jednemu takiemu zastosowaniu zbiorów maksymalnych.

Zbiór X jest maksymalny w rodzinie zbiorów $\mathbb{Z}$, jeśli X nie jest zawarty w żadnym różnym od niego zbiorze z tej rodziny.

Można łatwo skonstruować funkcję przekształcającą w sposób różnowartościowy zbiór liczb naturalnych na jego kwadrat: $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{\text{1–1}} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Mianowicie ustawimy wszystkie pary liczb naturalnych w ciąg: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,0)$, $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(4,0), \ldots$

Kwadratem zbioru A nazywamy iloczyn kartezjański $A \times A$, tj. zbiór wszystkich takich par (a,b), że $a, b \in A$.

Łatwo dostrzec regułę: najpierw bierzemy parę $(0,0)$, potem takie pary (k,l), że $k+l=1$, potem takie, że $k+l=2$ itd. W ramach każdej grupy porządkujemy pary (k,l) według rosnącego k.

Istnienie takiej funkcji f oznacza, że zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mają tyle samo elementów; mówimy wtedy, że są **równoliczne**. Trochę trudniej jest dowieść, że istnieje funkcja $g : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{na}]{\text{1–1}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (czyli że prosta ma tyle samo punktów co płaszczyzna). Taką funkcję g pierwszy skonstruował matematyk niemiecki Georg Cantor w końcu XIX wieku. Powstało pytanie, czy podobną własność ma każdy zbiór nieskończony. W roku 1906 matematyk niemiecki Hessenberg udowodnił, że tak rzeczywiście jest. W dowodzie twierdzenia Hessenberga można wykorzystać zbiory maksymalne.

Niech więc A będzie zbiorem nieskończonym i przyjrzyjmy się rodzinie takich funkcji f, że $f : B \xrightarrow[\text{na}]{\text{1–1}} B \times B$, gdzie B jest nieskończonym podzbiorem zbioru A. Takie funkcje istnieją. Istotnie, z tego, że zbiór A jest nieskończony, wynika, iż można z niego wybrać nieskończony ciąg różnych elementów $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Funkcję f możemy zdefiniować przyporządkowując kolejnym wyrazom tego ciągu pary (a_0,a_0), (a_0,a_1), (a_1,a_0), (a_0,a_2), (a_1,a_1), (a_2,a_0), (a_0,a_3), (a_1,a_2), (a_2,a_1), (a_3,a_0), (a_0,a_4), (a_1,a_3), (a_2,a_2), (a_3,a_1), $(a_4,a_0), \ldots$

W tej definicji rozpoznajemy znane nam już numerowanie par liczb naturalnych. Jeśli funkcja $f : B \xrightarrow[\text{na}]{\text{1–1}} B \times B$ jest elementem maksymalnym w tym zbiorze funkcji (tzn. nie istnieje taka funkcja $g : C \xrightarrow[\text{na}]{\text{1–1}} C \times C$, że $f \subset g$), to można dowieść, że zbiór B jest równoliczny ze zbiorem A. Ponieważ zbiór B jest równoliczny ze swoim kwadratem, to i zbiór A okazuje się równoliczny ze swoim kwadratem.

Funkcję definiuje się jako taki zbiór par (x,y), że żaden element nie występuje na pierwszym miejscu w dwóch różnych parach.

Jak dowieść, że taka maksymalna funkcja istnieje? Tę kwestię rozstrzyga właśnie tzw. Lemat Kuratowskiego–Zorna. Przed sformułowaniem tego lematu zdefiniujemy jeszcze jedno pojęcie. Mówimy, że rodzina zbiorów Y jest łańcuchem, jeśli każde dwa zbiory P i Q należące do Y są porównywalne, tzn. $P \subseteq Q$ lub $Q \subseteq P$.

Lemat Kuratowskiego–Zorna mówi, że jeśli dana jest taka rodzina zbiorów X, że dla dowolnego łańcucha $Y \subseteq X$ suma wszystkich zbiorów rodziny Y należy do X, to rodzina X ma element maksymalny.

Dowód, że zdefiniowana wyżej rodzina funkcji spełnia założenia lematu Kuratowskiego–Zorna, nie jest trudny. Łącznie otrzymujemy wniosek, że każdy zbiór nieskończony jest równoliczny ze swoim kwadratem.

Rozwiązanie zadania M 1025.
Skorzystamy z nierówności pomiędzy ważoną średnią arytmetyczną i geometryczną: $a_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{w_n} \leqslant \left(\dfrac{a_1 w_1 + \ldots a_n w_n}{w_1 + \ldots + w_n}\right)^{w_1 + \ldots + w_n}$.
Mamy

$$x_1 \cdot (2 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot (n x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}\right)^{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} = s_n^{-s_n},$$

gdzie $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
Równość zachodzi, gdy $x_1 = 2\,x_2 = \ldots = n\,x_n$, co w połączeniu z równością $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ daje $x_i = \frac{1}{i}\,x_1 = \frac{1}{i} s_n^{-1}$.
Szukane maksimum wynosi więc

$$\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot \ldots \cdot n^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \cdot s_n^{-s_n}.$$

Rozwiązanie zadania M 1026.
Z nierówności $\dfrac{x}{a} + \dfrac{b}{x} \geqslant 2\sqrt{ab}$, dla $a, b > 0$ (z równością przy $x = \sqrt{ab}$) wynika, że suma $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_1}{x_i} + \frac{x_i}{x_1}\right)$ jest najmniejsza, gdy

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{x_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)(x_{k+1} + \ldots + x_n)} \overset{\text{ozn}}{=} c.$$

To samo zachodzi, gdy x_1 zamienimy na $x_2, \ldots, x_k$. Zatem suma

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \leqslant k,\ j > k}} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right)$$

jest najmniejsza, gdy $x_1 = \ldots = x_k = c$. Mamy też

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j,\ i,j \leqslant k}} \frac{x_i}{x_j} \geqslant k(k-1),$$

z równością dla $x_1 = \ldots = x_k$, gdyż $\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i} \geqslant 2$. Suma

$$\sum_{\substack{i,j \\ i > k,\ j > k,\ i \neq j}} \frac{x_i}{x_j}$$

jest stała. Należy zatem przyjąć $x_1 = \ldots = x_k = c$.