Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2003

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 461, 462

Redaguje Marcin E. KUCZMA

461. Dane są funkcje ciągłe f oraz g; każda z nich jest ściśle monotonicznym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ na ten sam zbiór. Wiadomo ponadto, że $f(0) = g(0)$ oraz

$$f^{-1}\big(g(x)\big) + g^{-1}\big(f(x)\big) = 2x \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wykazać, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

462. Rozważamy rozbicia zbioru wszystkich dodatnich liczb całkowitych na sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B.

(a) Czy istnieje takie rozbicie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu arytmetycznego?

(b) Czy istnieje takie rozbicie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu geometrycznego?

Zadanie **462** zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2003

Przypominamy treść zadań:

453. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 3y = u^2 \\ y^2 + 3x = v^2 \end{cases}$$

w dodatnich liczbach całkowitych x, y, u, v.

454. Znaleźć taką stałą C, by dla każdej liczby naturalnej n oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n > 0$ zachodziła nierówność:

$$\tfrac{1}{a_1} + \tfrac{2}{a_1+a_2} + \ldots + \tfrac{n}{a_1+\ldots+a_n} \leqslant C\big(\tfrac{1}{a_1} + \tfrac{1}{a_2} + \ldots + \tfrac{1}{a_n}\big)$$

(im mniejsza stała C, tym wyższa ocena za rozwiązanie).

453. Niech liczby całkowite $x, y, u, v > 0$ spełniają podany układ; przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $x \geqslant y$. Wówczas $u^2 = x^2 + 3y < (x+2)^2$, skąd $u = x+1$ i $3y = 2x+1$. Podstawiamy $x = (3y-1)/2$ do drugiego równania układu:

$$v^2 = y^2 + \frac{9y-3}{2} < (y+3)^2$$

i widzimy, że $v = y+1$ lub $v = y+2$. To daje alternatywę

$$\frac{9y-3}{2} = 2y+1 \qquad \text{lub} \qquad \frac{9y-3}{2} = 4y+4$$

i dwa rozwiązania (x, y, u, v) rozważanego układu: $(1, 1, 2, 2,)$ oraz $(16, 11, 17, 13)$; a po wycofaniu założenia, że $x \geqslant y$, jeszcze trzecie rozwiązanie $(11, 16, 13, 17)$.

454. Wykażemy, że stała $C = \mathrm{e}$ jest dobra. Przyda się w tym celu nierówność

$$(*) \qquad k! > \left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^k \qquad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Oto jej uzasadnienie:

$$\mathrm{e}^k = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}\cdot\ldots\cdot\mathrm{e} > \left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)^k =$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\ldots\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{(k+1)^k}{k!}$$

i nierówność $(*)$ jest wykazana.

Niech teraz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Przyjmijmy

$$x_k = \frac{k}{a_1 + \ldots + a_k} \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Korzystając kolejno z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną, a następnie z nierówności $(*)$ oraz z nierówności między średnią geometryczną i średnią harmoniczną, mamy dla $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{1}{x_k} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \big(a_1 a_2 \ldots a_k\big)^{1/k} =$$

$$= \big(k!\big)^{1/k}\left(a_1 \cdot \frac{a_2}{2} \cdot \frac{a_3}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{k}\right)^{1/k} >$$

$$> \frac{k+1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \ldots + \frac{k}{a_k}}$$

a zatem

$$x_k < \frac{\mathrm{e}}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{a_i}.$$

Stąd zaś (wobec tożsamości $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k < \mathrm{e} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{a_i} =$$

$$= \mathrm{e} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{a_i} \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \mathrm{e} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{a_i} \cdot \frac{1}{i},$$

czyli, ostatecznie,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \ldots + a_k} < \mathrm{e} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Rozważana nierówność jest więc dla każdego układu liczb $a_1, \ldots, a_n > 0$ spełniona ze stałą $C = \mathrm{e}$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2003

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
344 ($WT = 1{,}60$), **345** ($WT = 3{,}70$),
346 ($WT = 2{,}02$) i **347** ($WT = 3{,}16$),
z numerów 10/2002 i 11/2002

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	43,22
Aleksander Surma	– Myszków	43,21
Marek Wójcicki	– Szczecin	39,67
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	31,58
Tomasz Wietecha	– Tarnów	27,43
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	19,16

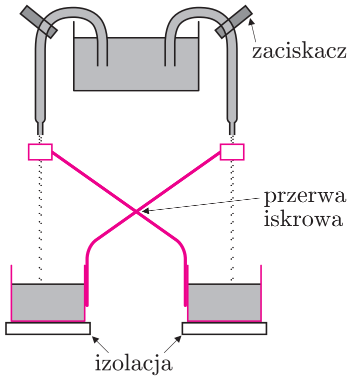
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
445 ($WT = 1{,}56$) i **446** ($WT = 2{,}19$)
z numeru 9/2002

Marcin Peczarski	– Latchorzew	46,05
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	44,27
Janusz Olszewski	– Suwałki	38,52
Tomasz Wietecha	– Tarnów	35,40

Znów kolejka „weterańska”: Marcin Peczarski zostaje czwartym Weteranem Klubu 44M; a Weteran Tomasz Rawlik zalicza piąte czterdziestoczteropunktowe okrążenie.

Zadania z fizyki nr 358, 359

Redaguje Jerzy B. BROJAN



358. Przedstawione na rysunku obok urządzenie (zaprojektowane przez Kelvina) składa się z naczynia z wodą, z którego spływa ona cienkimi strugami do dwóch naczyń poniżej niego. Do każdego z dolnych naczyń przyspawano drut, na końcu którego znajduje się pierścień z blaszki otaczający spadającą strugę wody, przy czym woda powinna się dzielić na krople właśnie wewnątrz pierścienia. Po pewnym czasie w miejscu krzyżowania się drutów (gdzie odległość między nimi jest niewielka) zaczynają przeskakiwać iskry. Objaśnić działanie przyrządu.

359. Drut miedziany o kształcie spiralnym ma n zwojów, pole przekroju poprzecznego spirali wynosi S, a utworzona w ten sposób sprężyna ma stałą sprężystości k. Na sprężynie zawieszono ciężarek o masie m, a końce sprężyny przyłączono do źródła napięcia $U = U_0 \sin \omega t$. Obliczyć amplitudę drgań ciężarka po długim czasie (tzn. gdy można pominąć zjawiska przejściowe – można tu założyć, że występuje niewielkie tłumienie elektryczne i mechaniczne) oraz przesunięcie środka drgań względem jego położenia, gdy prąd nie płynie. Pominąć masę drutu. Przyjąć, że pole magnetyczne spirali jest takie, jak nieskończenie długiej zwojnicy.

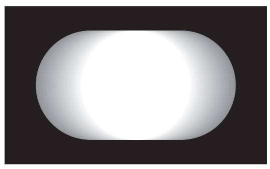
Wskazówka. Przy tym założeniu siła ściskająca zwojnicę (działająca na końce wzdłuż osi) dana jest wzorem $F = (1/2)\mu_0 S(In/l)^2$, gdzie l – długość zwojnicy, I – natężenie prądu. (Wyprowadzenie tego wzoru było przed 11 laty tematem odrębnego zadania w naszej lidze.)

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2003

Przypominamy treść zadań:

350. Na gładkiej poziomej powierzchni stoi miotacz o masie M, początkowo nieruchomy. Jeśli praca mięśni miotacza w czasie rzutu jest ustalona, to pod jakim kątem α do poziomu miotacz powinien wyrzucić kulę o masie m, żeby zasięg rzutu był maksymalny? Pominąć rozmiary miotacza i opór powietrza.

351. Światło słoneczne przechodzi prostopadle przez szczelinę o wymiarach 3×60 mm i tworzy „zajączka” (rys.) na ekranie w zaciemnionym pomieszczeniu. Podać przybliżoną wartość odległości ekranu od szczeliny. Pozostałe niezbędne dane wziąć z tablic. Uwaga: wielkość rysunku nie odpowiada rzeczywistości, więc nie należy się kierować jego ogólnym rozmiarem.



350. Oznaczmy pracę miotacza symbolem E, prędkość nadaną kuli (względem układu inercjalnego) przez v, a prędkość uzyskaną przez samego miotacza wskutek odrzutu przez V. Zasady zachowania pędu i energii wyrażają się równaniami

$$MV = mv\cos\alpha$$

i

$$2E = MV^2 + mv^2.$$

Eliminując V, wyznaczamy zależność v od α:

$$v^2 = \frac{2ME}{m(m\cos^2\alpha + M)}.$$

Zasięg rzutu ukośnego jest proporcjonalny do $v^2 \sin 2\alpha$ (wyprowadzenie jest podane w każdym podręczniku), więc zadanie sprowadza się do wyznaczenia kąta α, dla którego wyrażenie

$$\frac{\sin 2\alpha}{m\cos^2\alpha + M}$$

ma maksymalną wartość. Przed różniczkowaniem wygodnie jest wyrazić mianownik przez $\cos 2\alpha$.

Po przekształceniach otrzymujemy wynik

$$\cos 2\alpha = -\frac{m}{m + 2M}.$$

Oczywiście, gdy $M \gg m$, powracamy do znanego wyniku $\alpha = 45^\circ$.

351. Każdy punkt szczeliny daje na ekranie obraz o kształcie koła (co wynika z kształtu tarczy słonecznej), a cała szczelina daje obraz powstały wskutek nałożenia się kół pochodzących od poszczególnych punktów. Jeśli oznaczymy średnicę kół przez d, a długość szczeliny przez l, to rozmiary „zajączka” wynoszą d i $d + l$ (szerokość szczeliny pomijamy). Na rysunku stosunek tych rozmiarów wynosi około 1,4 – stąd wykorzystując daną wartość $l = 6$ cm, znajdujemy $d \approx 15$ cm. Ponieważ kątowa średnica Słońca jest równa $32' = 0{,}0093$ rad, więc ekran jest odległy od szczeliny o $(15\ \mathrm{cm})/0{,}0093 \approx 16$ m. Szerokość szczeliny jest istotna tylko o tyle, że usprawiedliwia pominięcie efektów dyfrakcyjnych – uwzględniając długość fali świetlnej, można obliczyć, że rozmycie dyfrakcyjne wynosi około 3 mm, czyli znacznie mniej od d.