05/03 (65)

KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (3)

Przed miesiącem zaprezentowaliśmy cztery rozwiązania poniższego zadania. Dziś sposób piąty.

Zadanie: (XLVI Olimpiada Matematyczna, stopień II, zadanie 6): Kwadrat o boku długości n dzielimy na n^2 kwadratów jednostkowych. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii tego podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.

Sposób V: Patrząc na rysunki 8–11, od razu widzimy…, że zupełnie nic nie widzimy. Czyżby losowa sieczka liczb miała być rozwiązaniem zadania?

2	0	−1	0	2
0	−2	3	−2	0
−1	3	−4	3	−1
0	−2	3	−2	0
2	0	−1	0	2

Rys. 8

4	−3	1	0	1	−3	4
−3	2	0	−1	0	2	−3
1	0	−2	3	−2	0	1
0	−1	3	−4	3	−1	0
1	0	−2	3	−2	0	1
−3	2	0	−1	0	2	−3
4	−3	1	0	1	−3	4

Rys. 9

2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2

Rys. 10

4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4

Rys. 11

1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1
−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1
−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1
−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1
−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1
−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1
−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1

Rys. 12

A jednak. Suma liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 4, natomiast każdy kwadrat o boku 2 lub 3 zawiera liczby o sumie 0. Zaraz, zaraz, ale jak to stwierdzić?

Bez trudu widzimy, że na rysunku 12 suma liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 1, natomiast suma liczb w polach dowolnego kwadratu o boku 2 lub 3 jest równa 0.

Takież własności mają też numeracje powstałe z obrotu numeracji przedstawionej na rysunku 12 o kąty 90°, 180° i 270°. Wysumowanie, pole po polu, tych czterech numeracji daje to, co widzimy na rysunku 11.

Dowiedliśmy po pięciokroć, że kwadratu o boku n nie da się podzielić na kwadraty o bokach 2 lub 3, jeśli n jest liczbą nieparzystą niepodzielną przez 3. Ale wobec tego chcielibyśmy to zrobić w możliwie najlepszym przybliżeniu, tzn. usuwając z dużego kwadratu jedno pole, które w podziale nie będzie brało udziału. Czy da się to zrobić i które pole należy usunąć?

Dla $n=1$ oczywiście **TAK**, ale chyba nie o takie rozwiązanie nam chodziło.

Przy $n=5$ popatrzmy na rysunek 8. Zgodnie z własnościami numerowania podanymi w sposobie V, musimy usunąć takie pole, aby suma liczb w pozostałych polach była równa 0. Musi więc to być pole z liczbą 4. Jednak takiego pola nie znajdujemy, więc kwadratu o boku 5 nie da się podzielić na kwadraty o bokach 2 lub 3 nawet po usunięciu z niego jednego pola.

Dla $n=7$ rysunek 9 wskazuje nam, że musimy usunąć pole narożne. Wówczas suma liczb w pozostawionych polach jest równa 0, ale nic z tego. Chwila zastanowienia pokazuje, że wokół usuniętego pola narożnego nie da się przeprowadzić podziału na kwadraty o bokach większych od 1.

Dla $n=11$ (rysunek 10) jedyne pole z czwórką to pole środkowe. Po usunięciu tego pola podział na kwadraty, z których każdy ma bok 2 lub 3, jest nietrudny, pozostawiamy go więc Czytelnikowi.

Dla $n=13$ (rysunek 11) mamy 9 pól z liczbą 4. Jednak pola narożne, jak wcześniej ustaliliśmy, nie wchodzą w rachubę. Podobnie, nie da się rozpocząć podziału wokół pola przylegającego do boku dużego kwadratu. Znowu pozostaje tylko pole środkowe. Po jego usunięciu podział na żądane kwadraty jest nietrudny.

2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1
0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0
2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2

Rys. 13

Podobne rozważania dla $n=17$ i $n=19$ (rysunek 13 i 14) pokazują, że po usunięciu jednego pola podział jest możliwy. Pole, które należy usunąć, nie jest polem środkowym, ale jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do symetrii. Jest to pole z liczbą 4, nieleżące przy brzegu kwadratu.

4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0	−1	3	−4	3	−1	0
1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1	0	−2	3	−2	0	1
−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3	2	0	−1	0	2	−3
4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4	−3	1	0	1	−3	4

Rys. 14

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl