Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

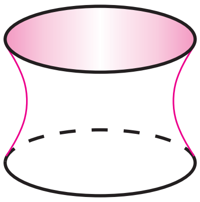
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2003

Zadania z fizyki nr 356, 357

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Obok rozwiązania analitycznego lub numerycznego dopuszczalna jest też odpowiedź oparta na przeprowadzonym doświadczeniu.



Rys. 1

356. Z cienkiego drutu wykonano dwa jednakowe kółka o promieniu r_0. Kółka zetknięto i zwilżono wodą z mydłem (tylko sam brzeg, wnętrze kółek nie było pokryte błonką), a następnie powoli rozsuwano w kierunku prostopadłym do ich płaszczyzny (rysunek 1). Na jaką maksymalną odległość można je odsunąć, żeby łącząca je błonka nie przerwała się?

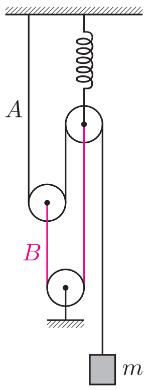
357. Siły jądrowe wiążą jądra atomowe tak mocno, że podwyższenie temperatury materii nawet do kilkunastu milionów stopni nie jest w stanie wpłynąć na budowę wewnętrzną jąder. Dlaczego więc rozpad izotopu berylu ^{7}Be zachodzi we wnętrzu Słońca znacznie wolniej niż w laboratorium ziemskim?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2002

Przypominamy treść zadań:

348. Ciężarek o masie m wisi na nici A, która owija się wokół dwóch bloków ruchomych (rysunek 2). Osie tych bloków są połączone inną nicią B przełożoną przez blok nieruchomy; ponadto na oś górnego bloku działa sprężyna o stałej sprężystości k. Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka. Pominąć masę bloków.

349. Objętość powietrza zawartego w pokoju wynosi $V = 40$ m^3, jego temperatura (równa temperaturze zewnętrznej) $T_1 = 35°$C, a ciśnienie jest równe $p = 10^5$ Pa. Jaka jest minimalna ilość energii elektrycznej, którą musi pobrać z sieci klimatyzator, żeby obniżyć temperaturę w pokoju do wartości $T_2 = 25°$C? Przyjąć, że przepływ ciepła przez ściany i okna można pominąć, a powietrze jest gazem dwuatomowym.



Rys. 2

348. Załóżmy, że oś górnego bloku ruchomego przesunie się w górę o z. Wtedy oś dolnego bloku przesunie się w dół o ten sam odcinek z, czyli lewy odcinek nici A wydłuży się o z, a środkowy o $2z$. Aby łączna długość nici A pozostała niezmieniona, prawy odcinek musi ulec skróceniu o $3z$, co oznacza podniesienie ciężarka w górę o $x = 4z$.

Analizując z kolei występujące w zadaniu siły, stwierdzamy, że wszystkie trzy odcinki nici A napięte są jednakową siłą F, oba odcinki nici B napięte są jednakową siłą równą $2F$, a siła wywierana przez sprężynę wynosi $4F$. Gdy więc wskutek przesunięcia osi górnego bloku o z siła wywierana przez sprężynę zmniejszy się o kz, siła działająca ze strony nici A na ciężarek zmaleje o $(1/4)kz = (1/16)kx$ – tak, jakby wisiał na sprężynie o stałej sprężystości $k' = (1/16)k$. Zatem szukany okres drgań T jest dany wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 8\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

349. Przy założeniu, że klimatyzator jest doskonałą maszyną cieplną, ciepło pobrane z wnętrza $\mathrm{d}Q_w$ i ciepło oddane do otoczenia $\mathrm{d}Q_o$ spełniają związek

$$\frac{\mathrm{d}Q_w}{T} = \frac{\mathrm{d}Q_o}{T_1},$$

gdzie T jest aktualną temperaturą w pokoju.

Praca $\mathrm{d}W$ prądu zasilającego klimatyzator jest równa

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q_o - \mathrm{d}Q_w = \mathrm{d}Q_w(T_1/T - 1).$$

W czasie oziębiania powietrza w pokoju ciśnienie pozostaje stałe (oczywiście pokój nie jest hermetyczny!), więc z zewnątrz wchodzi do środka szparami ciepłe powietrze. Liczba moli powietrza w pokoju jest równa

$$n = pV/RT,$$

a jej zmiana wynikająca ze zmiany temperatury dana jest wzorem

$$\mathrm{d}n = -\frac{pV}{RT^2}\mathrm{d}T.$$

Ciepło pobrane z wnętrza pokoju $\mathrm{d}Q_w$ należy więc przyrównać do sumy dwóch wyrażeń – ciepła odebranego przy oziębieniu n moli powietrza o $\mathrm{d}T$ oraz ciepła odebranego podczas oziębienia $\mathrm{d}n$ moli powietrza od temperatury T_1 do temperatury T:

$$\mathrm{d}Q_w = -nC_p\mathrm{d}T + C_p(T_1 - T)\mathrm{d}n$$

(pamiętajmy, że $\mathrm{d}T < 0$), gdzie C_p jest ciepłem molowym powietrza przy ogrzewaniu (lub oziębianiu) pod stałym ciśnieniem, dla gazu dwuatomowego równym $(7/2)R$.

Po przekształceniach dochodzimy do równania

$$\mathrm{d}W = -\frac{pVC_p}{RT}\frac{T_1}{T}\left(\frac{T_1}{T} - 1\right)\mathrm{d}T.$$

Całkowanie od T_1 do temperatury końcowej T_2 prowadzi do wyniku

$$W = \frac{pVC_p}{R}\frac{(T_1 - T_2)}{2T_2^2} = 7883\,\mathrm{J}.$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2003

Zadania z matematyki nr 459, 460

Redaguje Marcin E. KUCZMA

459. W czworokącie $ABCD$ boki BC i DA mają jednakową długość. Symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkt P leży na symetralnej odcinka łączącego środki boków BC i DA.

460. Dowieść, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0; \pi/4\rangle$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{(\operatorname{tg} x_1)(\operatorname{tg} x_2)\ldots(\operatorname{tg} x_n)} \leqslant \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}\,.$$

Zadanie **460** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2002

Przypominamy treść zadań:

451. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ losujemy podzbiór sześcioelementowy. Wyznaczyć te liczby naturalne n, dla których bardziej prawdopodobne jest wylosowanie zbioru zawierającego co najmniej jedną parę liczb kolejnych niż wylosowanie zbioru bez takiej pary.

452. Dla danych liczb dodatnich a, b, c wyznaczyć największą średnicę, jaką może mieć koło zawarte w prostopadłościanie o krawędziach długości a, b, c.

451. Zadanie ma sens dla $n \geqslant 6$. Weźmy dowolny sześcioelementowy zbiór $A \subset \{1, \ldots, n\}$ $(n \geqslant 6)$; jego elementy tworzą sześciowyrazowy ciąg rosnący $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Zbiór A nie zawiera pary liczb kolejnych wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{i+1} - a_i > 1$ dla $i = 1, \ldots, 5$, czyli dokładnie wtedy, gdy ciąg $(b_1, \ldots, b_6)$ określony wzorem $b_i = a_i - i + 1$ jest rosnący. Wyrazy takiego ciągu tworzą sześcioelementowy zbiór $B \subset \{1, \ldots, n{-}5\}$. Na odwrót, sześciowyrazowy rosnący ciąg $b_1 < \ldots < b_6$ $(\leqslant n{-}5)$ generuje ciąg $(a_1, \ldots, a_6)$ dany wzorem $a_i = b_i + i - 1$, o różnicach $a_{i+1} - a_i > 1$.

Mamy więc bijekcję między rodziną sześcioelementowych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ bez pary liczb kolejnych oraz rodziną wszystkich sześcioelementowych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n{-}5\}$. Należy wobec tego wyznaczyć te liczby $n \geqslant 6$, dla których zachodzi nierówność $\binom{n-5}{6} < \frac{1}{2}\binom{n}{6}$. Przepiszmy ją w postaci

$$p_n := \frac{n-5}{n} \cdot \frac{n-6}{n-1} \cdot \frac{n-7}{n-2} \cdot \frac{n-8}{n-3} \cdot \frac{n-9}{n-4} \cdot \frac{n-10}{n-5} < \frac{1}{2}\,.$$

Ciąg o wyrazach $k_n = \frac{n-5}{n}$ jest rosnący; ciąg o wyrazach $p_n = k_n k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} k_{n-4} k_{n-5}$ jest także rosnący. A ponieważ $p_{48} < \frac{1}{2} < p_{49}$, zatem warunek, o który chodzi w zadaniu, jest spełniony tylko przez liczby naturalne $n = 6, 7, 8, \ldots, 48$.

452. Niech $\mathbf{w} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ będzie dowolnym wektorem długości jednostkowej w $\mathbb{R}^3$; tworzy on z osiami układu współrzędnych kąty α, β, γ. Jeżeli koło o średnicy d leży w płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\mathbf{w}$, to rzut tego koła na każdą z osi jest odcinkiem, a długości tych odcinków wynoszą

$$d\,|\sin\alpha|, \qquad d\,|\sin\beta|, \qquad d\,|\sin\gamma|.$$

Koło takie da się umieścić w prostopadłościanie $a \times b \times c$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\sin\alpha| \leqslant \frac{a}{d}, \quad |\sin\beta| \leqslant \frac{a}{d}, \quad |\sin\gamma| \leqslant \frac{c}{d}.$$

Równość

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

(wyrażająca jednostkową długość wektora $\mathbf{w}$) jest równoważna równości

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

Przyjmując

$$\sin^2\alpha = x, \qquad \sin^2\beta = y, \qquad \sin^2\gamma = z,$$

sprowadzamy zadanie do następującego:

wyznaczyć największą liczbę $d > 0$, dla której istnieją liczby $x, y, z \in \langle 0; 1\rangle$ spełniające warunki

$$(*) \qquad x + y + z = 2; \qquad x \leqslant \frac{a^2}{d^2}\,, \quad y \leqslant \frac{b^2}{d^2}\,, \quad z \leqslant \frac{c^2}{d^2}\,.$$

Rozważymy dwa przypadki.

1°. $a^2 \leqslant b^2 + c^2$, $b^2 \leqslant c^2 + a^2$, $c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

Jeśli istnieją liczby x, y, z o podanych własnościach, to

$$2 = x + y + z \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2},$$

czyli

$$d \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}\,.$$

Można tu uzyskać równość: liczby

$$x = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}\,, \quad y = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}\,, \quad z = \frac{2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

należą do przedziału $\langle 0; 1\rangle$ i spełniają warunki $(*)$ dla $d = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2}$.

2°. Niech na przykład $c^2 > a^2 + b^2$.

Jeżeli liczby x, y, z istnieją, to ze związków

$$x + y = 2 - z \geqslant 1 \qquad \text{oraz} \qquad x + y \leqslant \frac{a^2 + b^2}{d^2}$$

wnosimy, że

$$d \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tu też można mieć równość: liczby

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2}\,, \qquad y = \frac{b^2}{a^2 + b^2}\,, \qquad z = 1$$

należą do przedziału $\langle 0; 1\rangle$ i spełniają warunki $(*)$ dla $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Sytuacja jest analogiczna, gdy $a^2 > b^2 + c^2$ lub $b^2 > c^2 + a^2$.

Zestawiając wyniki uzyskane w obu rozważonych przypadkach, mamy odpowiedź: dla zadanych liczb $a, b, c > 0$ największa możliwa średnica d ma długość

$$d_{\max} = \min\left\{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}, \sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{b^2 + c^2}, \sqrt{c^2 + a^2}\right\}.$$