Dzielenie trójkąta na trójkąty podobne do niego

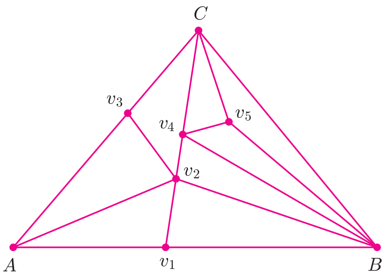
Andrzej ŻAK

Każdy zapewne wie, że
trójkąt można podzielić na dwa trójkąty podobne do niego wtedy i tylko wtedy, gdy jest on prostokątny,
bo jest to inne sformułowanie twierdzenia Pitagorasa (wraz z twierdzeniem do niego odwrotnym). Oczywiste jest więc, że trójkąt prostokątny można podzielić na dowolną liczbę trójkątów do niego podobnych. Dlatego zajmę się dzieleniem trójkątów nieprostokątnych.

Moje zainteresowanie tym problemem wzięło się z pytania: *czy nieprostokątny trójkąt można podzielić na pięć trójkątów podobnych do niego*? Przed dalszą lekturą proponuję Czytelnikom znalezienie takiego podziału. Moje, zrazu bezowocne, rozważania doprowadziły do wniosku, że tylko jeden trójkąt można podzielić w ten sposób, a taki podział też jest tylko jeden. Było na ten temat (jak się później dowiedziałem) zadanie przygotowawcze XXV Olimpiady Matematycznej; o jedyności nie było tam mowy. Tutaj dowodzę tej jedyności, a także rozważam sprawę podziału trójkąta nieprostokątnego na inną liczbę części niż 5.

Przyjęte oznaczenia:
Dzielony będzie trójkąt ABC o kątach α, β, γ, przy czym $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.
W powstałym w wyniku podziału grafie oznaczymy przez E zbiór krawędzi. Liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka v nazywamy stopniem wierzchołka i oznaczamy $\deg v$.
Ponadto:
V_b – zbiór wierzchołków na bokach trójkąta, różnych od A, B, C;
V^4 – zbiór wierzchołków grafu leżących wewnątrz trójkąta i wewnątrz boku pewnego trójkąta podziału;
V^6 – zbiór wierzchołków grafu leżących wewnątrz pewnego odcinka, niebędącego bokiem żadnego trójkąta podziału;
V^3 – zbiór pozostałych wierzchołków grafu.

Przykład:
Na poniższym rysunku jest:
$v_1, v_3 \in V_b$, $v_2 \in V^6$, $v_4 \in V^4$, $v_5 \in V^3$.



Jak zazwyczaj, $|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.

Najpierw dwa lematy kombinatoryczne dotyczące dowolnego podziału, niekoniecznie na trójkąty podobne.

Lemat 1. *Dla podziału trójkąta na n trójkątów zachodzi* (patrz oznaczenia na marginesie)
$$|E| = \frac{1}{2}\big(3(n+1) + |V_b| + |V^4|\big).$$
Istotnie, obchodząc trójkąt dokoła, stwierdzamy, że na brzegu jest $3 + |V_b|$ krawędzi. Niech k będzie liczbą odcinków, na których leżą wierzchołki z V^4; dzielą one te odcinki na $|V^4| + k$ krawędzi oraz wyznaczają boki $m_i + 1$ trójkątów po jednej i $n_i + 1$ trójkątów po drugiej stronie każdego z nich ($i = 1, 2, \ldots, k$). Wobec tego krawędzie te są bokami $\sum_{i=1}^{k}(m_i+1)(n_i+1) = |V^4| + 2k$ trójkątów. Natomiast każda z nieuwzględnionych dotąd krawędzi jest bokiem dokładnie dwóch trójkątów. Mamy więc
$$|E| = 3 + |V_b| + |V^4| + k + \frac{1}{2}\big(3n - (3 + |V_b|) - (|V^4| + 2k)\big) = \frac{1}{2}\big(3(n+1) + |V_b| + |V^4|\big).$$

Lemat 2. *Dla podziału na n trójkątów zachodzi*
$$(*) \qquad |V^3| + |V^6| = \frac{1}{2}(n - 1 - |V_b| - |V^4|).$$
Korzystając ze wzoru Eulera, mamy bowiem
$$|E| + 1 = n + (3 + |V_b| + |V^3| + |V^4| + |V^6|),$$
co po podstawieniu wartości $|E|$ z lematu 1 daje tezę.

Wzór Eulera dotyczący grafu płaskiego orzeka, że liczba obszarów ograniczonych, które wyznaczają krawędzie grafu, plus liczba jego wierzchołków jest równa liczbie krawędzi plus 1.

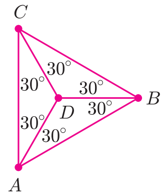
Teraz żądamy już, by trójkąt dzielić na nieprostokątne trójkąty podobne, choć niekoniecznie podobne do niego. Oto nasuwające się uwagi.

Uwaga 1. *Suma dowolnych dwóch kątów utworzonych przez krawędzie grafu jest różna od* $180°$.
Istotnie – będzie to przecież suma dwóch (niekoniecznie różnych) kątów trójkąta nieprostokątnego.

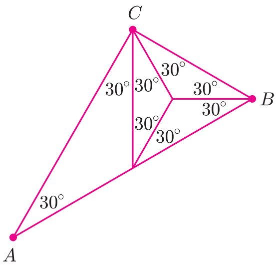
Uwaga 2. *Żadnego trójkąta nie można podzielić na dwa podobne trójkąty nieprostokątne.*
Przy podziale na dwa, przy jednym z boków tworzą się kąty przyległe, co jest sprzeczne z uwagą 1.

Z uwagi 1 wynika też bezpośrednio
Uwaga 3 (uzasadniająca oznaczenia).
Jeśli $v \in V^3$, to $\deg v \geqslant 3$,
jeśli $v \in V^4$ lub $v \in V_b$, to $\deg v \geqslant 4$,
jeśli $v \in V^6$, to $\deg v \geqslant 6$.

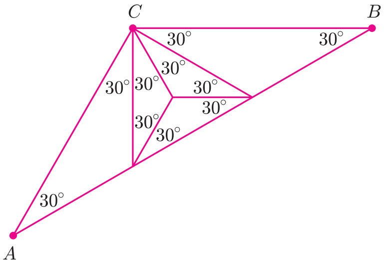
Rozwiązanie zadania M 1022.
Niech $x_1, \ldots, x_6$ będą odpowiednio długościami boków kwadratów $K_1, \ldots, K_6$ oraz niech α, β, γ będą kątami w trójkącie ABC. Korzystając z twierdzenia kosinusów, otrzymamy równości
$$x_4^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3\cos\alpha,$$
$$x_5^2 = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3\cos\beta,$$
$$x_6^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\gamma,$$
$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3\cos\alpha,$$
$$x_2^2 = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3\cos\beta,$$
$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\gamma.$$
Dodając stronami powyższe równości, otrzymamy tezę
$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czytelnikowi pozostawiam sprawdzenie, że słuszna jest

Uwaga 4. *Jeśli w grafie nie ma wierzchołków wewnętrznych, to* $|V_b| = 0$ *lub* $|V_b| = 3$.

Jako wskazówkę podam, że mój dowód polegał na wykazaniu, że żaden z wierzchołków ze zbioru V_b nie może być połączony z dwoma wierzchołkami z tegoż zbioru leżącymi na jednym z pozostałych boków trójkąta – przypuszczenie takie prowadzi do stwierdzenia, że zbiór V_b jest nieskończony.

I w ten sposób doszliśmy do sprawy liczby podziałów.

Lemat 3. *Jedynie trójkąt równoboczny można podzielić na trzy podobne trójkąty i jest to podział jedyny, a trójkąty są nawet przystające.*

Dowód. Jak to zrobić, wie każdy (rysunek 1). Dowieść należy tylko jedyności. Oczywiste jest, że $|V^4| = |V^6| = 0$. Wzór $(*)$ przybiera więc postać $|V^3| = 1 - \frac{1}{2}|V_b|$. Zatem $|V_b| = 2$ albo $|V_b| = 0$. Pierwszy przypadek prowadzi do $|V^3| = 0$, co powoduje sprzeczność z uwagą 4. W drugim przypadku mamy $|V^3| = 1$ – oznaczmy ten jedyny wierzchołek przez D. Musi on być połączony ze wszystkimi wierzchołkami trójkąta. Kąty wokół wierzchołka D nie mogą być wszystkie różne, bo wtedy ich suma (suma kątów trójkąta !) jest równa $180°$, a przecież ma to być kąt pełny. Gdyby tylko dwa z nich były równe – np. $2\gamma + \beta = 360°$ – to po odjęciu od tego stronami $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ otrzymalibyśmy $\gamma - \alpha = 180°$, a więc $\gamma > 180°$ – sprzeczność. Stąd wszystkie kąty przy wierzchołku D są równe $120°$.
Rozpatrzymy dwa przypadki:

i) – kąty powstałe przy wierzchołku C są równe. Wówczas trójkąty ACD i BCD są przystające, z czego wynika, że $|AD| = |BD|$, skąd wynika, że $\alpha = \beta = 30°$, a to prowadzi do sytuacji z rysunku 1.

ii) – kąty przy wierzchołku C są różne, czyli w sumie dają $\alpha + \beta = 60°$, co prowadzi do tego samego wniosku.

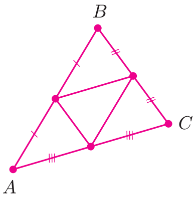
Trójkąt i podział przedstawione na rysunku 1 są zatem jedynymi możliwymi podziałami trójkąta na trzy nieprostokątne trójkąty podobne.

Zapewne każdy z Czytelników w tym miejscu powie, że już wie, jaki trójkąt można podzielić na cztery nieprostokątne trójkąty podobne (rysunek 2 – dzielony trójkąt jest prostokątny !), a jaki na pięć nieprostokątnych trójkątów podobnych (rysunek 3). W tym ostatnim przypadku otrzymujemy nawet podział na trójkąty podobne do dzielonego. Zajmijmy się więc teraz tylko takimi podziałami.

Lemat 4. *Każdy trójkąt można podzielić na cztery podobne do niego trójkąty; w przypadku trójkąta nieprostokątnego podział taki jest jeden.*

Dowód. Każdy wie, jaki podział jest dobry (rysunek 4); pozostaje wykazać jedyność dla trójkąta nieprostokątnego. Wzór $(*)$ dopuszcza następujące cztery przypadki:

i) $|V^4| = 0$, $|V_b| = 3$, $|V^3| = 0$,
ii) $|V^4| = 0$, $|V_b| = 1$, $|V^3| = 1$,
iii) $|V^4| = 1$, $|V_b| = 2$, $|V^3| = 0$,
iv) $|V^4| = 1$, $|V_b| = 0$, $|V^3| = 1$.



Rys. 4

Należy wyeliminować ostatnie trzy możliwości.
W przypadku *ii)* i *iii)* musiałby istnieć odcinek łączący wierzchołek trójkąta ABC z jego przeciwległym bokiem, a więc powstałyby dwa trójkąty. Jedyną możliwością byłoby, aby jeden z nich był podzielony na trzy trójkąty. Z lematu 3 wynika, że cała sytuacja przedstawiałaby się jak na rysunku 2, a przecież tam trójkąt dzielony nie jest podobny do części podziału (i jest prostokątny).
W przypadku *iv)* wierzchołek ze zbioru V^3 musiałby być połączony ze wszystkimi wierzchołkami dzielonego trójkąta, co daje podział na trzy. Jednak wobec uwagi 2 żaden z nich nie może być podzielony na dwa podobne trójkąty. Tym samym sytuacja z przypadku *i)* jest dla trójkąta nieprostokątnego jedyna.

Rozwiązanie zadania F 593.
Przy rzucie bez rozbiegu maksymalny zasięg rzutu wynosi $l \approx v_0^2/g$, gdzie v_0 jest prędkością nadawaną kamieniowi przez siłę mięśni sportowca. Przy rzucie z rozbiegiem kamień uzyskuje jeszcze dodatkową prędkość poziomą v, a składowa pionowa prędkości w chwili rzutu $v_0 \sin\alpha_0$ nie zmienia się. A zatem nie zmienia się też czas lotu, który wynosi $t \approx \frac{2v_0}{g}\sin\alpha_0$, co dla $\alpha_0 = 45°$ daje $t \approx \sqrt{2}\frac{v_0}{g}$. Dodatkowo pokonana odległość wynosi więc $\Delta l \approx tv \approx \sqrt{2l/g}v$ (bo $v_0 \approx \sqrt{lg}$). Dla przykładowych danych $v \approx 10$ m/s i $l \approx 50$ m dostajemy $\Delta l \approx 30$ m.

Rozwiązanie zadania F 594.
W czasie przemieszczenia t na długość samochodu l jego środek ciężkości nabierze pionowej prędkości

$$v \approx gl/V_{\text{samochodu}}$$

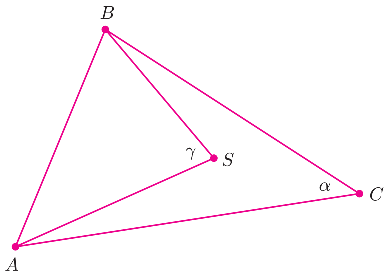
i prędkości kątowej

$$\omega \approx v \cdot 2/l \approx 2g/V_{\text{samochodu}}.$$

Zatem liczba obrotów samochodu wynosi

$$n \approx t_{\text{spadania}}\omega/(2\pi) \approx \approx \sqrt{2gH}/(\pi V_{\text{samochodu}}) \approx 1{,}5$$

dla poziomej prędkości $V_{\text{samochodu}}$ równej 30 m/s.



Rys. 5

Zanim przejdziemy do dowodu kolejnego lematu, potrzebna jest

Uwaga 5. *Przy podziale trójkąta nieprostokątnego na podobne do niego trójkąty, jeśli jeden z boków trójkąta ABC (np. AB) byłby również bokiem takiego trójkąta podziału, którego trzeci wierzchołek D leżałby wewnątrz trójkąta ABC, to w trójkącie ABD kąt przy wierzchołku D nie byłby mniejszy od żadnego z pozostałych, a w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C nie byłby większy od żadnego z pozostałych* (rys. 5).

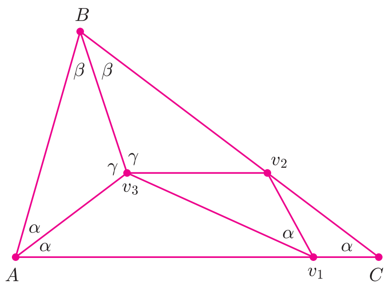
Wynika stąd, że w takim podziale $|V_b| \geqslant 1$.

Lemat 5. *Istnieje tylko jeden trójkąt nieprostokątny dający się podzielić na pięć trójkątów podobnych do niego.*

Dowód. Ponieważ znamy już taki trójkąt, więc pozostaje jedynie wykazanie jedyności.
Najpierw przypuśćmy, że w otrzymanym grafie istnieje odcinek łączący wierzchołek z przeciwległym bokiem. Dzieli on więc wyjściowy trójkąt na dwa trójkąty. Zatem jeden z nich musi się dzielić na cztery podobne trójkąty nieprostokątne. Podział opisany w lemacie 4 nie jest dobry, bo przy nim istniałby wierzchołek na boku dzielonego trójkąta, z którego wychodziłyby tylko trzy krawędzie wbrew uwadze 3. Zatem musi być to sytuacja z rysunku 2, co prowadzi do podziału z rysunku 3.
Pozostaje do rozpatrzenia sytuacja, gdy odcinka łączącego wierzchołek z przeciwległym bokiem nie ma.
Zauważmy, że musi być $|V^6| = 0$, natomiast $|V^4|$ nie może przekroczyć 1 – w przeciwnym razie trójkątów podziału byłoby co najmniej 6. Mamy zatem dwa przypadki:

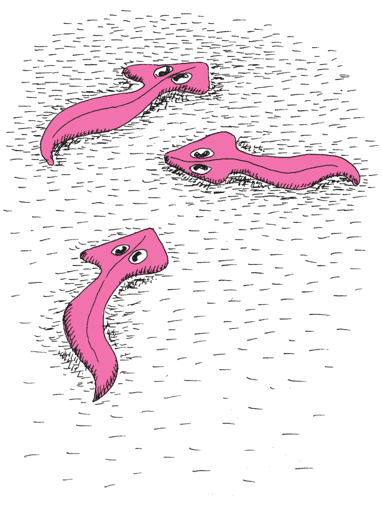
i) $|V^4| = 0$,

ii) $|V^4| = 1$.



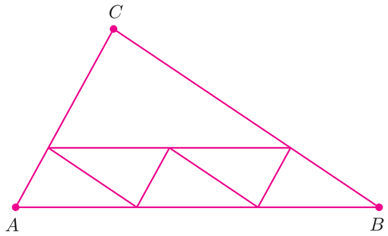
Rys. 6

Rozpatrzę pierwszy z nich. Przypuśćmy, że udało się taki podział zrealizować. Ze wzoru $(*)$ wynika (wobec $|V^3| \geqslant 1$ i $|V_b| \geqslant 1$), że $|V^3| = 1$ i $|V_b| = 2$.
Przy braku odcinka łączącego punkt ze zbioru V_b z przeciwległym wierzchołkiem oba punkty z V_b są połączone krawędzią. Dzieli to wyjściowy trójkąt na trójkąt i czworokąt. Zatem czworokąt musi być podzielony na cztery części (bo znów gdyby trójkąt był podzielony na trzy części, to odcinek dzielący czworokąt na dwa łączyłby wierzchołek wyjściowego trójkąta z przeciwległym bokiem).
Zatem sytuacja musi wyglądać tak, jak na rysunku 6.
Na mocy uwagi 5 wiemy, że przy wierzchołku C trójkąta ABC jest kąt α (przypominam: nie większy od żadnego z pozostałych – patrz oznaczenia na początku artykułu), a $\sphericalangle Bv_3A = \gamma$, co wynika z uwagi 5. Przyjmijmy ze względu na symetrię, że $\sphericalangle CAB = \beta$ i $\sphericalangle CBA = \gamma$. Ponieważ oba są podzielone na mniejsze, więc musi być $\beta = 2\alpha$ i $\gamma = 2\beta$ (gdyby było $\gamma = \alpha + \beta$, trójkąt byłby prostokątny, podobnie niemożliwe jest $\gamma = 2\alpha$).
Stąd znamy wartości tych kątów, mianowicie $\gamma = 2\beta = 4\alpha = 4 \cdot \dfrac{180^\circ}{7}$. Wobec tego wokół wierzchołka v_3 muszą występować trzy kąty γ i jeden kąt β, bo tylko tak można z czterech takich kątów ułożyć kąt pełny. Zatem $\sphericalangle Bv_3v_2 = \gamma$, a więc $|v_3v_2| = |Av_3|$, bo trójkąty Bv_3v_2 i Bv_3A są przystające. Ponieważ $\sphericalangle Av_1v_3 \neq \alpha$ i $\sphericalangle Cv_1v_2 \neq \alpha$, więc $\sphericalangle v_3v_1v_2 = \alpha$. Boki leżące naprzeciwko kątów α (najmniejszych) są najkrótszymi bokami w swoich trójkątach – stąd w trójkącie $v_1v_2v_3$ jest $|v_3v_2| < |v_1v_3|$, a w trójkącie Av_1v_3 jest $|v_1v_3| < |Av_3|$. Łącznie mamy więc $|v_3v_2| < |Av_3|$, choć poprzednio stwierdziliśmy, że są to odcinki równe. Sprzeczność – taki podział okazał się niemożliwy.



Wzór $(*)$ dzieli sytuację z przypadku *ii*) na dwie: albo jest $|V^3| = 1$ i $|V_b| = 1$, albo $|V^3| = 0$ i $|V_b| = 3$. Pierwsza z nich prowadzi do sprzeczności z uwagą 5, druga do sprzeczności z uwagą 3, już bez rachunku boków i kątów. Ale sprawdzenie tego pozostawiam Czytelnikowi.

Na szczęście podział trójkątów na większą liczbę podobnych do nich to już prosta sprawa.



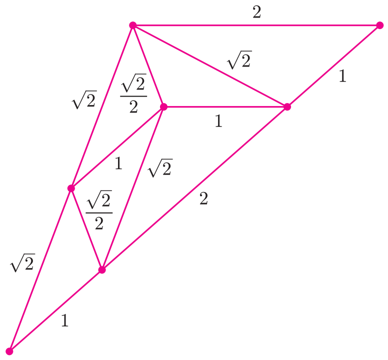
Rys. 7

Lemat 6. *Każdy trójkąt możemy podzielić na dowolną parzystą, większą od 2, liczbę podobnych do niego trójkątów.*

Oto konstrukcja dla $n = 2k$. Jeden z boków (np. AB) dzielimy na k równych części, następnie rysujemy odcinki równoległe do boków dzielonego trójkąta, jak na rysunku 7 (gdzie $k = 3$). Z twierdzenia Talesa wynika, że powstałe trójkąty są podobne i realizują wobec tego żądany podział.

Lemat 7. *Każdy trójkąt można, dla $n > 5$, podzielić na n podobnych do niego trójkątów.*

Istotnie, z poprzedniego lematu wiadomo, że można trójkąt podzielić na dowolną parzystą, większą od dwóch liczbę podobnych do niego trójkątów. Dzieląc zatem trójkąt na 4 części, a następnie jeden z tych czterech trójkątów na $2k$ trójkąty podobne do niego, otrzymujemy podział na $4 + 2k - 1 = 2k + 3$ części dla dowolnego $k > 1$.



Rys. 8

Zreasumujmy zatem uzyskane rezultaty opisujące możliwość dzielenia trójkątów nieprostokątnych na podobne do nich trójkąty:

– **żadnego nie da się podzielić na 2 ani na 3,**
– **każdy da się podzielić na 4,**
– **tylko jeden da się podzielić na 5,**
– **każdy da się podzielić na dowolną liczbę części większą od pięciu.**

Można zapytać jeszcze, czy istnieją specjalne podziały na większą niż pięć liczbę części, np. podziały, w których $|V^4| = 0$ (tzw. podział symplicjalny lub triangulacja). Przykład trójkąta, który można w ten sposób podzielić na 6 części, prezentuje rysunek 8.

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i *Delty*!

Rozwiąż w kwietniu majowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

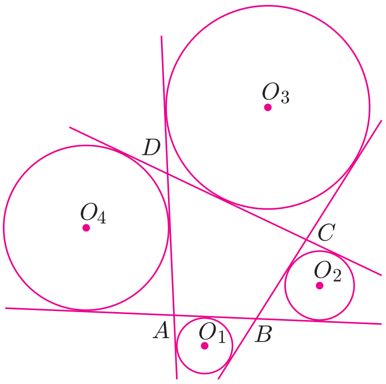
Więcej informacji: http://www.wiw.pl/delta/konkurs

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 593. Oszacować, na ile dalej sportowiec może rzucić kamieniem, jeśli rzut wykona z rozbiegu, a nie z miejsca.
Rozwiązanie na str. 5

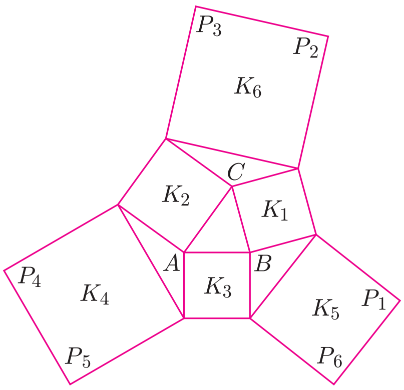
F 594. Oszacować liczbę obrotów wykonanych przez samochód spadający w kilometrową przepaść na swojej pełnej prędkości.
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1021. Każdy z okręgów o środkach O_1, O_2, O_3, O_4 jest styczny zewnętrznie do czworokąta wypukłego $ABCD$ i przedłużeń dwóch jego przeciwległych boków (rysunek 1). Wykazać, że punkty O_1, O_2, O_3, O_4 leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

M 1022. Startując od dowolnego trójkąta ABC, zbudowano kwadraty $K_1, K_2, \ldots, K_6$ jak na rysunku 2. Wykazać, że suma pól kwadratów K_4, K_5, K_6 jest trzy razy większa od sumy pól kwadratów K_1, K_2, K_3.
Rozwiązanie na str. 4

M 1023. Do konstrukcji z poprzedniego zadania dorysujmy jeszcze kwadraty K_7, K_8, K_9 oparte na odcinkach P_1P_2, P_3P_4 i P_5P_6. Wykazać, że suma ich pól jest 16 razy większa od sumy pól kwadratów K_1, K_2, K_3.
Rozwiązanie na str. 3