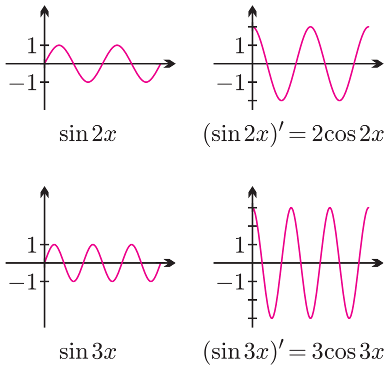
W najprostszym przypadku – gdy rozpatrujemy przepływ jednowymiarowy (!) – składnik nieliniowy ma postać $u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Gdyby rozwiązanie było postaci np. $u = \sin nx$, to składnik nieliniowy dałby:

$$\sin nx \cdot n \cos nx = \frac{n}{2} \sin 2nx.$$

Wprowadziłby zatem do równania drgania na mniejszej skali, a wraz z nimi znaczny wzrost pochodnej przestrzennej (czyli tempa wzrostu prędkości na małych kawałkach), co dla $n = 2$ i $n = 3$ obrazują rysunki.



Kłopot z nimi jest taki, że nie wiemy, czy są one jednoznaczne (tzn., czy nie natrafimy na sytuację z rysunku 4). Skąd biorą się te problemy? Otóż z grubsza biorąc analogiczną rolę do stałej Lipschitza pełni w równaniu Naviera–Stokesa maksymalna wartość tempa, w jakim rośnie prędkość na małych odcinkach w obszarze Ω. Gdybyśmy potrafili to maksymalne tempo wzrostu prędkości oszacować dla wszystkich możliwych czasów przez tę samą stałą, już moglibyśmy planować, na co wydamy milion dolarów z Clay Mathematics Institute. Ale nie potrafimy. Może brakuje nam metod, może inteligencji, by te metody wymyślić. A może po prostu zrobić się tego nie da. Może równanie Naviera–Stokesa produkuje rozmaite anomalie, może tempo wzrostu prędkości na maleńkich odcinkach bywa nieograniczone? Są pewne intuicje, które właśnie takie rozwiązanie podpowiadają. Fizycy wskazują w tym miejscu na mechanizm, jaki pojawia się w sytuacji trójwymiarowej, a nie ma miejsca w przepływie płaskim. Otóż jeśli wyobrazimy sobie mały „walec wodny", który rozciąga się wraz z przepływem (tzn. z „grubego robi się chudy") i którego punkty („cząsteczki") obracają się tak, że oś ich obrotu jest równoległa do kierunku przepływu, to dostrzeżemy, że aby moment pędu został zachowany, cząstki muszą zwiększyć prędkość wirowania. W ten sposób lokalnie prędkość wirów może silnie wzrastać. Patrząc od strony czysto matematycznej dostrzegamy, że całe zło bierze się z pewnego składnika nieliniowego w równaniu, który „pompuje energię" do małych skal długości (patrz margines).

Tak czy inaczej, sytuacja jest nerwowa. Jeśli równanie Naviera–Stokesa nie ma jednoznacznych i regularnych rozwiązań dla dowolnych czasów, to przeczy zasadzie determinizmu, a ponadto – jeśli przenosi fluktuacje do dowolnie małych skal – jest w pewnym sensie sprzeczne, gdyż wyprowadzone zostało w oparciu o separację skal długości.

Na szczęście woda nic sobie z tych problemów nie robi i płynie dalej.

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i *Delty*!

Rozwiąż w marcu kwietniowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: http://www.wiw.pl/delta/konkurs

Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1018. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ taka, że

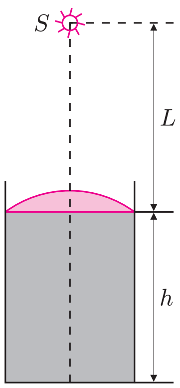
$$1 + f(x) = f\left(\frac{-x}{x+1}\right)$$

dla dowolnego $x > -1$, $x \in \mathbb{R}$.
Rozwiązanie na str. 12

M 1019. Dla pewnego $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ i dowolnego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x-a) - f(x+a) = [\sqrt{f(x) - f(x+a)}]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wykazać, że f jest funkcją okresową.
Rozwiązanie na str. 6

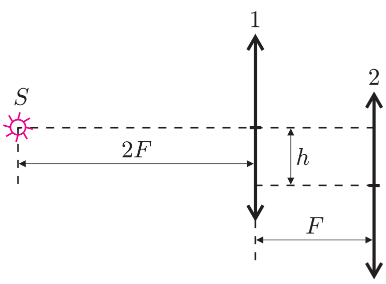
M 1020. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $|f(x)| \leqslant 1$ oraz $f(x) + f\left(x + \frac{13}{42}\right) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$. Wykazać, że f jest funkcją okresową.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

F 591. Na powierzchni cieczy znajdującej się w wysokim naczyniu (rys. 1) pływa płaskowypukła soczewka o ogniskowej F. Znaleźć wysokość poziomu cieczy w naczyniu h, jeśli obraz punktowego źródła światła S, położonego w odległości L od soczewki, znajduje się na dnie naczynia. Współczynnik załamania cieczy wynosi n. Przyjąć, że odległość L jest bardzo duża.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

F 592. Dwie soczewki skupiające o takich samych ogniskowych równych F znajdują się w odległości F od siebie (rys. 2). Osie optyczne obu soczewek są równoległe i odległe o h. Znaleźć odległość między źródłem światła S położonym w odległości $2F$ od pierwszej soczewki na jej osi optycznej oraz jego obrazem S'.
Rozwiązanie na str. 13