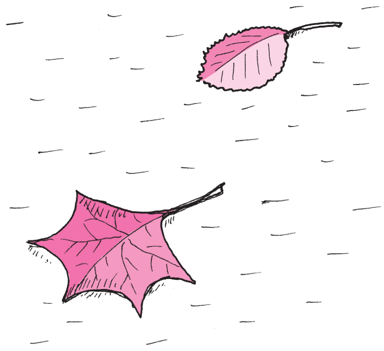
# Twierdzenie bez założeń?

*Krzysztof OLEŚ*



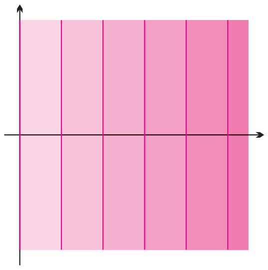
Sam tytuł wydaje się odrobinę prowokujący – brak założeń jest już przecież pewnym warunkiem na twierdzenie nałożonym... Lubimy jednak sytuacje, w których nie musimy zapamiętywać zbyt wielu faktów generujących kolejne. Zajmiemy się więc spostrzeżeniem, w którym o rozważanym zbiorze założymy jedynie to, iż jest on $m$-elementowym podzbiorem płaszczyzny. Zaczniemy jednak od przypomnienia pewnego twierdzenia, które w *Delcie* już się pojawiło [3].

**Twierdzenie 1** (*Helly,* 1913)
*Jeśli $\mathcal{F}$ jest skończoną, co najmniej trójelementową, rodziną podzbiorów wypukłych płaszczyzny o tej własności, że każda jej trójelementowa podrodzina ma przekrój niepusty, to $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

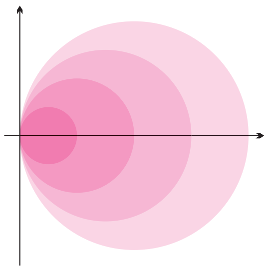
Przypomnijmy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$ zwiemy wypukłym, jeśli zachodzi następujący warunek

$$\forall_{a,b \in A} \quad \forall_{t \in [0,1]} \quad ta + (1-t)b \in A,$$

który całkowicie pokrywa się z naszą intuicją dotyczącą wypukłości (czyżbyśmy się nazbyt rozmarzyli?) – wystarczy spojrzeć na powyższy parametryczny zapis odcinka domkniętego.



Powyżej rozpatrujemy zstępujący nieskończony ciąg półpłaszczyzn, niżej zaś rozpatrujemy zstępujący nieskończony ciąg kół otwartych.



Niestety, przekrój nieskończonych rodzin złożonych z podzbiorów wypukłych płaszczyzny (które mają własność „podrodzinną”) może być zbiorem pustym, co pokazują przykłady obok.

Mamy tutaj do czynienia z pewnymi pułapkami. Za każdym razem wszystko psuje ucieczka w nieskończoność (w niej dopiero widzimy – albo i nie – pustość interesującego nas przekroju). Przy czym: w rozważaniu dotyczącym półpłaszczyzn dodatkowym defektem jest ich nieograniczoność, w drugim przypadku problemem staje się otwartość kół (co to dokładnie oznacza – tego na razie nie wiemy, ale zaraz uruchomimy definicje). Czy możliwa jest malutka poprawka? **Możliwa!** Posłużymy się pojęciem *zwartości*, które w przypadku płaszczyzny oznacza ni mniej, ni więcej jak tylko (?): $\mathfrak{a}$ ograniczoność, $\mathfrak{b}$ domkniętość. Cudownie! Literka $\mathfrak{a}$ nie dziwi: po prostu zbiór jest ograniczony, jeśli można go wpisać w pewne koło. A co z literką $\mathfrak{b}$? Cóż: zbiór jest domknięty, jeśli jego dopełnienie jest otwarte (pani Ewa Szumańska powiedziałaby w tej chwili: „już po wszystkiem”)...

Przypatrzmy się więc bliżej otwartości (co na to UE?).

Zbiór nazywamy otwartym, jeśli dla każdego jego punktu istnieje koło, którego jest on środkiem, zawarte w interesującym nas podzbiorze płaszczyzny. Dla rozwiania jakichkolwiek wątpliwości: kołem o środku w punkcie $x = (x_0, y_0)$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(x,r) := \left\{ (w,z) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(w-x_0)^2 + (z-y_0)^2} \leqslant r \right\}.$$

W tym miejscu warto zauważyć, że zbiór, który nie jest otwarty, nie musi być domknięty – może wymyślimy przykładzik? W ostateczności spójrzmy na stronę 16.

Czas na poprawione twierdzenie Helly'ego.

**Twierdzenie 2**
*Jeśli $\mathcal{F}$ jest co najmniej trójelementową rodziną zwartych i wypukłych podzbiorów płaszczyzny o tej własności, że każda jej trójelementowa podrodzina ma przekrój niepusty, to $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Można być zaskoczonym – powyższe twierdzenie wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 [2], okazuje się bowiem, że *zwartość* ma wiele wspólnego ze skończonością [1]. Przejdźmy do obiecanego twierdzenia.

**Rozwiązanie zadania M 1019.**
Niech $g(x) = f(x) - f(x+a)$. Wówczas nasze równanie można zapisać w postaci

$$g(x-a) + g(x) = [\sqrt{g(x)}].$$

Zatem $g(x) \geqslant 0$ oraz $[\sqrt{g(x)}] - g(x) \geqslant 0$. Ale dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$[\sqrt{t}] - t \geqslant 0 \iff t = 0 \text{ lub } t = 1 \iff [\sqrt{t}] - t = 0.$$

Zatem $g(x-a) = 0$, więc $g \equiv 0$, skąd wynika, że $f$ jest funkcją okresową o okresie $a$.

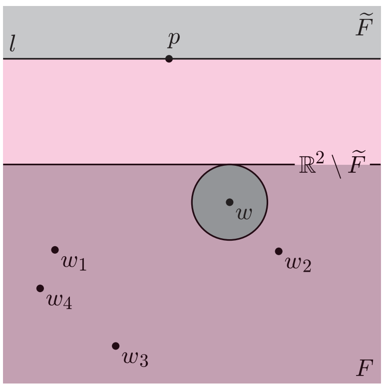
**Rozwiązanie zadania M 1020.**
Niech $g(x) = f(x+\frac{1}{6}) - f(x)$.
Z równości podanej w zadaniu mamy $g(x+\frac{1}{7}) = g(x)$, skąd $g(x+1) = g(x)$. Mamy
$$f(x+1) - f(x) = \sum_{i=0}^{5} g\left(x + \frac{i}{6}\right).$$
Prawą stronę tej równości oznaczmy przez $h(x)$. Oczywiście $h(x+1) = h(x)$, skąd $f(x+n) - f(x) = n \cdot h(x)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ale $f$ jest funkcją ograniczoną, więc $h = 0$ i $f$ jest funkcją okresową o okresie 1.

**Twierdzenie 3** (o punkcie podziału)
*Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest dowolnym zbiorem $m$-elementowym, to istnieje punkt $p \in \mathbb{R}^2$ o tej własności, że każda domknięta półpłaszczyzna wyznaczona przez prostą przechodzącą przez $p$ zawiera co najmniej $\frac{m}{3}$ punktów zbioru $A$.*

Uff... Brak założeń okupiliśmy dosyć nużącą tezą, ale rysowanie pozwoli nam przyswoić ją sobie, a poza tym wykaże jej dziwaczność – jak bowiem znaleźć taki punkt, gdy zbiór $A$ ma, dajmy na to, $136 \cdot 10^7$ punktów?

**Dowód:** Niech $B$ będzie takim kołem, że $A \subseteq B$, ponadto oznaczmy
$$\forall_{C \subseteq \mathbb{R}^2} \quad |C|_A := \text{liczba elementów zbioru } C \cap A.$$
Rozważając rodzinę $\mathcal{F}$, złożoną z domkniętych półpłaszczyzn $F$ o własności $|F|_A > \frac{2}{3}m$, wykażemy, że każde trzy elementy rodziny $\mathcal{G} := \{F \cap B : F \in \mathcal{F}\}$ mają punkt wspólny (należący do zbioru $A$).

Ustalmy zatem $F_1 \cap B, F_2 \cap B, F_3 \cap B \in \mathcal{G}$. Wystarczy wykazać, że
$$\exists_{a \in A} \quad a \in F_1 \cap F_2 \cap F_3, \quad \text{czyli} \quad |F_1 \cap F_2 \cap F_3|_A \neq 0.$$
Ponieważ dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$ mamy $|F|_A > \frac{2}{3}m$, to
$$\forall_{F \in \mathcal{F}} \quad |\mathbb{R}^2 \setminus F|_A < \frac{1}{3}m.$$
Przypuśćmy, że $|F_1 \cap F_2 \cap F_3|_A = 0$.
Otrzymujemy wtedy $|\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cap F_2 \cap F_3)\,|_A = m$ oraz
$$m = |\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cap F_2 \cap F_3)\,|_A = |\,\big(\mathbb{R}^2 \setminus F_1\big) \cup \big(\mathbb{R}^2 \setminus F_2\big) \cup \big(\mathbb{R}^2 \setminus F_3\big)\,|_A \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbb{R}^2 \setminus F_1|_A + |\mathbb{R}^2 \setminus F_2|_A + |\mathbb{R}^2 \setminus F_3|_A < \tfrac{1}{3}m + \tfrac{1}{3}m + \tfrac{1}{3}m = m.$$
Otrzymana sprzeczność daje
$$|F_1 \cap F_2 \cap F_3|_A \neq 0.$$
Elementy rodziny $\mathcal{G}$ są zbiorami wypukłymi (zarówno półpłaszczyzna domknięta, jak i koło są zbiorami wypukłymi, a przekrój zbiorów wypukłych jest – oczywiście – zbiorem wypukłym) i zwartymi (jako zbiory ograniczone i domknięte) na płaszczyźnie, zatem z twierdzenia 2 otrzymujemy
$$\exists_{p \in \mathbb{R}^2} \quad p \in \bigcap \mathcal{G}.$$
Ustalmy teraz dowolną półpłaszczyznę domkniętą $\widetilde{F}$ wyznaczoną przez prostą $l$ przechodzącą przez punkt $p$. Mamy wykazać, że $|\widetilde{F}|_A \geqslant \frac{m}{3}$.

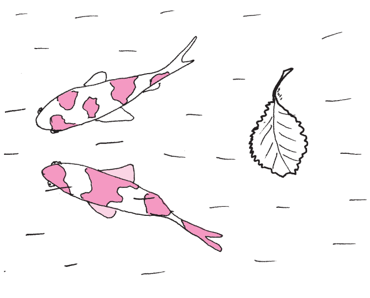



Idea doboru półpłaszczyzny domkniętej $F$ w dowodzie twierdzenia.

Z pewną nieśmiałością – przypuśćmy, że $|\widetilde{F}|_A < \frac{m}{3}$.
Otrzymujemy wtedy: $|\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{F}|_A > \frac{2}{3}m$, niech zatem
$$\{w_1, \ldots, w_k\} := \left(\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{F}\right) \cap A,$$
gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{2}{3}m$. Niech ponadto $w \in \{w_1, \ldots, w_k\}$ będzie jednym z punktów o własności
$$d\,(w, l) = \min\{d\,(w_1, l)\,, \ldots, d\,(w_k, l)\},$$
przy czym $d(x, l)$ oznacza odległość punktu $x$ od prostej $l$. Z otwartości zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{F}$ otrzymujemy istnienie takiego $r > 0$, że $B\,(w, r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{F}$. Jedna ze stycznych do $B\,(w, r)$ równoległych do $l$ wyznacza taką półpłaszczyznę domkniętą $F$, że: $F \cap B \in \mathcal{G}$ oraz $p \notin F \cap B$.

Dzięki upragnionej sprzeczności dostajemy $|\widetilde{F}|_A \geqslant \frac{m}{3}$, co kończy dowód.

Największa trudność w zastosowaniu twierdzenia Helly'ego polega na wymyśleniu rodziny, do której należy je zastosować – tak było w przypadku transwersali [3], tak jest i tutaj.



Bibliografia


[1] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia*, PWN 1980
[2] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa 1995
[3] K. Oleś, *O pewnej trudności w rysowniu odcinków, Delta* nr 11/2001 (330)
[4] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press 1994