Pytanie za milion dolarów: jak płynie woda?

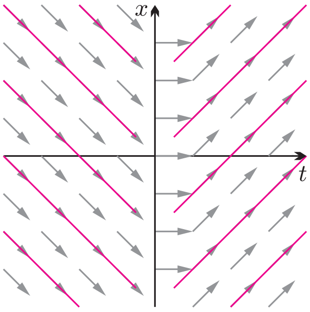
Witold SADOWSKI

W roku 2000 Clay Mathematics Institute z Massachusetts ogłosił listę siedmiu problemów matematycznych, za których rozwiązanie oferowana jest nagroda po milionie dolarów za każdy problem, o czym pisaliśmy już w *Delcie* 7/2000. Trzem z tych problemów poświęcone były weekendowe wykłady VI Festiwalu Nauki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW we wrześniu 2002 r. Niniejszy artykuł jest szkicem odczytu o równaniu Naviera–Stokesa. O dwóch pozostałych problemach, tj. o hipotezie Poincaré i hipotezie Riemanna będzie można natomiast przeczytać w *Delcie* jeszcze w tym roku.

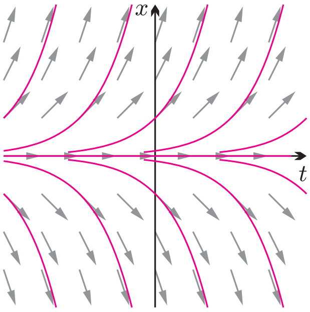
Ch. Doering i J.D. Gibbon: „Wcale nie jest jasne, czy jeden z podstawowych modeli mechaniki klasycznej o wielkim zastosowaniu w inżynierii nie jest sprzeczny. Ten podejrzany model to równanie Naviera–Stokesa opisujące dynamikę nieściśliwego płynu”.
(Applied Analysis of the Navier–Stokes Equations)

R.P. Feynman: „Próbowano już zatamować wodę za pomocą praw i równań (...); woda przerwała tamę i wymknęła się naszym próbom zrozumienia jej przepływu”
(Feynmana wykłady z fizyki)

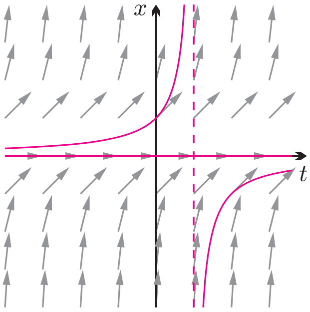
Zanim zajmiemy się problemem zasadniczym, tj. istnieniem rozwiązań równania opisującego przepływ wody, rozważmy pewną nieskomplikowaną sytuację. Wyobraźmy sobie mianowicie, że w każdym punkcie płaszczyzny zaczepiliśmy wektor jednostkowy o kierunku wyznaczonym przez współrzędne $[1, f(t,x)]$, gdzie f to pewna funkcja, t pierwsza współrzędna, którą zwać będziemy czasem, a x – to druga współrzędna. Spójrzmy, jak mogłoby to wyglądać dla czterech różnych funkcji f.



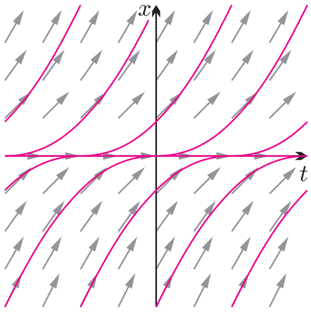
Rys. 1. $f(t,x) = \operatorname{sgn} t$



Rys. 2. $f(t,x) = x$

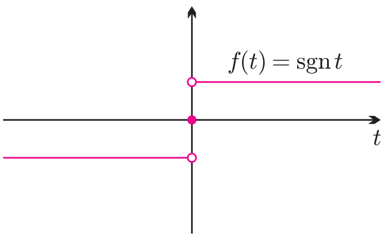


Rys. 3. $f(t,x) = x^2$

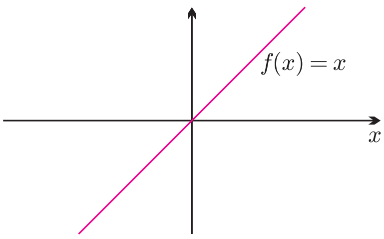


Rys. 4. $f(t,x) = \sqrt{|x|}$

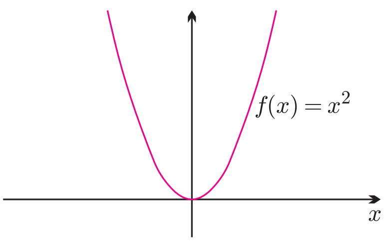
$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t > 0 \\ 0, & \text{gdy } t = 0 \\ -1, & \text{gdy } t < 0 \end{cases}$$



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Zaznaczone kolorem krzywe najlepiej, jak to możliwe, przylegają do narysowanych wektorów (wektory są do nich styczne). Mówimy, że krzywe te są rozwiązaniami równania różniczkowego zwyczajnego:

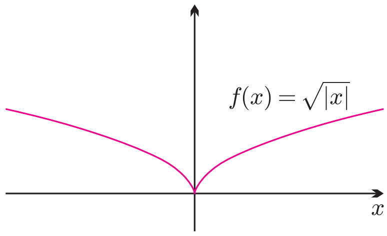
$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x).$$

Rozwiązania te są jednoznaczne, jeśli przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi nie więcej niż jedna krzywa.

Jak widzimy, na pierwszym rysunku nie da się poprowadzić żadnej krzywej przez oś x-ów: jedyna kandydatka ma równanie $x = |t| + c$, gdzie c to pewna stała, ale krzywa ta ma kant na osi x i żaden wektor nie przylega do niej w tym punkcie odpowiednio ściśle. Krzywe z rysunku 2 możemy przedłużać nieograniczenie w stronę dowolnie dużych czasów t (każda krzywa ma równanie $x(t) = c \cdot e^t$, gdzie c to pewna stała). Widać też, że przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna krzywa. Na rysunku 3 narysowana krzywa to hiperbola. Ma ona asymptotę pionową, co oznacza, że w skończonym czasie wartość rozwiązania $x(t)$ osiąga wartość nieskończoną i nie da się owego rozwiązania przedłużać nieograniczenie w stronę coraz większych czasów t. Wreszcie na rysunku 4 na brak rozwiązań nie można narzekać, dają się one przedłużać nieograniczenie w czasie, ale przez każdy punkt na osi t przechodzi wiele krzywych stanowiących rozwiązanie. Nie jest ono zatem jednoznaczne.

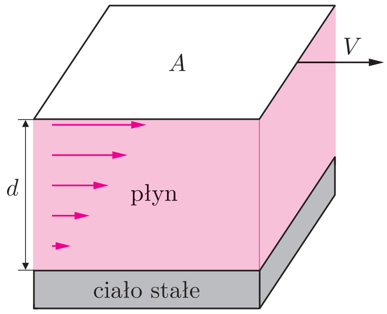
Od czego zależy, czy dane równanie różniczkowe ma jednoznaczne rozwiązania określone dla dowolnych czasów? Spójrzmy na wykresy funkcji f (margines).

Na rysunku 5 widzimy, że funkcja $f = \operatorname{sgn} t$ jest nieciągła w punkcie $t = 0$. Jest to dokładnie ten punkt, wokół którego nie dało się stworzyć rozwiązania. Na rysunku 6 funkcja $f(x) = x$ jest ciągła i tempo jej wzrostu jest zawsze takie samo. Funkcja $f(x) = x^2$ (rys. 7) jest ciągła, ale tempo jej wzrostu jest coraz większe i nie da się go globalnie (tzn. dla wszystkich x) ograniczyć. Wreszcie funkcja $f(x) = \sqrt{|x|}$ jest ciągła, ale tempo jej zmian jest nieograniczone



Rys. 8

Jeżeli w sytuacji przedstawionej na poniższym rysunku ciągniemy płaską płytkę o powierzchni A z prędkością v, to siła, jakiej musimy użyć, jest proporcjonalna do wyrażenia $\frac{AV}{d}$. Współczynnik proporcjonalności nazywamy lepkością cieczy i oznaczamy ν.



Liczba Reynoldsa to liczba

$$Re = \frac{V \cdot D \cdot \rho}{\nu},$$

gdzie V to średnia prędkość przepływu, ρ – gęstość cieczy, a D – typowy rozmiar (np. średnica opływanego walca).

Dla odważnych
Równanie Naviera–Stokesa (a ściślej: układ równań N-S dla płynu nieściśliwego) ma postać

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{Re}\triangle u_i + (u \cdot \nabla)u_i + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_i} = f_i,$$

przy warunku

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

gdzie $i = 1, 2, 3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ to prędkość, p – to ciśnienie, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – siły zewnętrzne, Re – liczba Reynoldsa oraz

$$\triangle u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial u_3^2},$$

i

$$(u \cdot \nabla) = u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Nie jest natomiast rozstrzygnięte, czy w płaskim przypadku stacjonarnym, tzn. takim, w którym prędkość w każdym punkcie nie zmienia się w czasie, rozwiązania są jednoznaczne dla dowolnych sił zewnętrznych i dowolnych lepkości; wiadomo tylko, że jest tak dla sił zewnętrznych niezbyt dużych w porównaniu z lepkością.

przy zbliżaniu się do zera. Jest to właśnie to miejsce, w którym rozwiązania równania różniczkowego stawały się niejednoznaczne. Okazuje się, że nasze luźne obserwacje mają uzasadnienie w podstawowym twierdzeniu teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Mówi ono, że rozwiązanie równania różniczkowego $(*)$ istnieje, gdy funkcja f jest ciągła. Jednoznaczność rozwiązania gwarantuje warunek nałożony na tempo wzrostu funkcji f. Ma być ono nie większe niż tempo wzrostu pewnej funkcji liniowej. Dokładniej, ma zachodzić tzw. warunek Lipschitza:

$$(**) \qquad |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y|,$$

gdzie L to pewna stała zwana stałą Lipschitza. Jeśli warunek taki jest spełniony dla wszystkich t, x i y z pewnego otoczenia pewnego punktu (t_0, x_0), to rozwiązanie przechodzące przez punkt (t_0, x_0) jest jednoznaczne przynajmniej przez pewien – być może niedługi – czas. Jeśli warunek $(**)$ jest spełniony z tą samą stałą L dla dowolnych x, y, t, to rozwiązania są globalne (można je przedłużać dowolnie daleko) i jednoznaczne. Teoria równania $(*)$ jest więc prosta i ogólna.

Okazuje się jednak, że w przypadku równań, w których poszukiwana funkcja g zależy od kilku zmiennych i w których występują funkcje określające tempo zmiany funkcji g w różnych kierunkach (tzw. pochodne cząstkowe), a także tempo zmiany tempa zmiany tych funkcji itd. (czyli tzw. pochodne cząstkowe wyższych rzędów), sytuacja dramatycznie się komplikuje. Tak, że teoria tych równań (zwanych równaniami cząstkowymi) w żadnym razie nie jest tak ogólna i elegancka jak teoria równań zwyczajnych i rozbija się na dziesiątki teorii poszczególnych niemal równań. Jednym z najważniejszych – ze względu na wagę zastosowań – jest właśnie równanie Naviera–Stokesa opisujące przepływ wody. Jest ono po prostu zapisem II prawa dynamiki Newtona z wyszczególnieniem sił zewnętrznych (takich jak np. grawitacja), ciśnienia oraz sił związanych z lepkością cieczy. W równaniu Naviera–Stokesa pojawia się jeden parametr, który silnie rzutuje – jak podpowiada doświadczenie – na rozwiązania równania. Parametrem tym jest tzw. liczba Reynoldsa. Dla małych wartości tej stałej przepływ płynu jest laminarny. Woda natrafiająca przykładowo na przeszkodę w postaci walca będzie go opływać w bardzo regularny sposób. Zwiększając liczbę Reynoldsa (tzn. zwiększając np. prędkość przepływu), spowodujemy, że przepływ stanie się mniej regularny: za walcem utworzą się dwa pola wirów. Przy jeszcze większej liczbie Reynoldsa wiry zaczną się odrywać, aż w końcu za walcem pojawi się cała turbulentna smuga.

Już z tego pobieżnego opisu widać, że równanie Naviera–Stokesa kryć w sobie może wiele niespodzianek i dopuszczać bardzo skomplikowane rozwiązania. I rzeczywiście sytuacja nie jest prosta, gdyż nie znamy odpowiedzi na następujące, podstawowe pytanie:

Czy jeśli w pewnej chwili prędkość cieczy określona jest w każdym punkcie jakiegoś trójwymiarowego obszaru Ω pewną gładką (można to rozumieć potocznie: ciągłą, bez kantów, ostrzy, itd.) funkcją $u(x_1, x_2, x_3)$, to czy w dowolnej chwili w przyszłości będzie ona określona równie regularną i jednoznacznie wyznaczoną funkcją, o ile ewolucja prędkości będzie dana równaniem Naviera–Stokesa z gładkimi siłami zewnętrznymi?

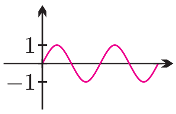
Innymi słowy, czy równanie Naviera–Stokesa daje się równie dobrze rozwiązać jak równanie różniczkowe zwyczajne, w którym prawa strona spełnia warunek Lipschitza? Albo jeszcze inaczej: czy równanie Naviera–Stokesa nie „produkuje” w skończonym czasie anomalii?

W tej chwili nikt nie zna odpowiedzi na to pytanie. Wiadomo co prawda, że gdy obszar Ω jest dwuwymiarowy, to wszystko jest w porządku: istnieją jednoznaczne regularne rozwiązania. W przypadku trójwymiarowym wiadomo, że istnieją regularne rozwiązania określone na pewnym początkowym przedziale czasu, ale nie wiadomo, czy da się je przedłużyć nieograniczenie w czasie (tzn., czy nie natrafimy na ten sam kłopot, co na rysunku 3). Wiadomo też, że istnieją rozwiązania mniej regularne, ale za to określone dla dowolnych czasów.

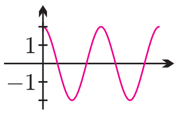
W najprostszym przypadku – gdy rozpatrujemy przepływ jednowymiarowy (!) – składnik nieliniowy ma postać $u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Gdyby rozwiązanie było postaci np. $u = \sin nx$, to składnik nieliniowy dałby:

$$\sin nx \cdot n \cos nx = \frac{n}{2} \sin 2nx.$$

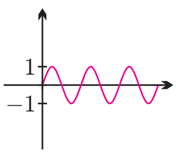
Wprowadziłby zatem do równania drgania na mniejszej skali, a wraz z nimi znaczny wzrost pochodnej przestrzennej (czyli tempa wzrostu prędkości na małych kawałkach), co dla $n = 2$ i $n = 3$ obrazują rysunki.



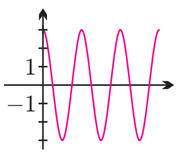
$\sin 2x$



$(\sin 2x)' = 2\cos 2x$



$\sin 3x$



$(\sin 3x)' = 3\cos 3x$

Kłopot z nimi jest taki, że nie wiemy, czy są one jednoznaczne (tzn., czy nie natrafimy na sytuację z rysunku 4). Skąd biorą się te problemy? Otóż z grubsza biorąc analogiczną rolę do stałej Lipschitza pełni w równaniu Naviera–Stokesa maksymalna wartość tempa, w jakim rośnie prędkość na małych odcinkach w obszarze Ω. Gdybyśmy potrafili to maksymalne tempo wzrostu prędkości oszacować dla wszystkich możliwych czasów przez tę samą stałą, już moglibyśmy planować, na co wydamy milion dolarów z Clay Mathematics Institute. Ale nie potrafimy. Może brakuje nam metod, może inteligencji, by te metody wymyślić. A może po prostu zrobić się tego nie da. Może równanie Naviera–Stokesa produkuje rozmaite anomalie, może tempo wzrostu prędkości na maleńkich odcinkach bywa nieograniczone? Są pewne intuicje, które właśnie takie rozwiązanie podpowiadają. Fizycy wskazują w tym miejscu na mechanizm, jaki pojawia się w sytuacji trójwymiarowej, a nie ma miejsca w przepływie płaskim. Otóż jeśli wyobrazimy sobie mały „walec wodny”, który rozciąga się wraz z przepływem (tzn. z „grubego robi się chudy”) i którego punkty („cząsteczki”) obracają się tak, że oś ich obrotu jest równoległa do kierunku przepływu, to dostrzeżemy, że aby moment pędu został zachowany, cząstki muszą zwiększyć prędkość wirowania. W ten sposób lokalnie prędkość wirów może silnie wzrastać. Patrząc od strony czysto matematycznej dostrzegamy, że całe zło bierze się z pewnego składnika nieliniowego w równaniu, który „pompuje energię” do małych skal długości (patrz margines).

Tak czy inaczej, sytuacja jest nerwowa. Jeśli równanie Naviera–Stokesa nie ma jednoznacznych i regularnych rozwiązań dla dowolnych czasów, to przeczy zasadzie determinizmu, a ponadto – jeśli przenosi fluktuacje do dowolnie małych skal – jest w pewnym sensie sprzeczne, gdyż wyprowadzone zostało w oparciu o separację skal długości.

Na szczęście woda nic sobie z tych problemów nie robi i płynie dalej.

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i *Delty*!

Rozwiąż w marcu kwietniowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: http://www.wiw.pl/delta/konkurs

Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1018. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ taka, że

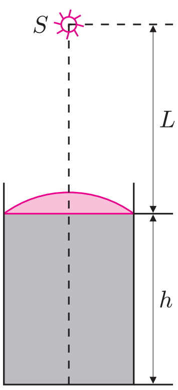
$$1 + f(x) = f\left(\frac{-x}{x+1}\right)$$

dla dowolnego $x > -1$, $x \in \mathbb{R}$.
Rozwiązanie na str. 12

M 1019. Dla pewnego $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ i dowolnego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x-a) - f(x+a) = [\sqrt{f(x) - f(x+a)}]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wykazać, że f jest funkcją okresową.
Rozwiązanie na str. 6

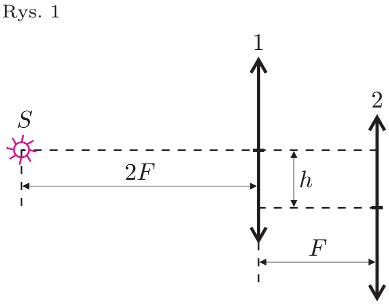
M 1020. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $|f(x)| \leqslant 1$ oraz $f(x) + f\left(x + \frac{13}{42}\right) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$. Wykazać, że f jest funkcją okresową.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

F 591. Na powierzchni cieczy znajdującej się w wysokim naczyniu (rys. 1) pływa płaskowypukła soczewka o ogniskowej F. Znaleźć wysokość poziomu cieczy w naczyniu h, jeśli obraz punktowego źródła światła S, położonego w odległości L od soczewki, znajduje się na dnie naczynia. Współczynnik załamania cieczy wynosi n. Przyjąć, że odległość L jest bardzo duża.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

F 592. Dwie soczewki skupiające o takich samych ogniskowych równych F znajdują się w odległości F od siebie (rys. 2). Osie optyczne obu soczewek są równoległe i odległe o h. Znaleźć odległość między źródłem światła S położonym w odległości $2F$ od pierwszej soczewki na jej osi optycznej oraz jego obrazem S'.
Rozwiązanie na str. 13