Skrót pracy nagrodzonej złotym medalem na XXIV Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.

Osobliwości i fraktalna niezupełność czasoprzestrzeni klasycznych

Wiesław ZAJICZEK

Na gruncie kosmologii powstało wiele matematycznych modeli, które pretendują do opisywania struktury i ewolucji Wszechświata. Znaczna część tych modeli wywodzi się z ogólnej teorii względności Einsteina. Chociaż wciąż nie znamy jednoznacznej odpowiedzi na pytanie o ilościowy opis przeszłej i przyszłej ewolucji tegoż Wszechświata, to jednak prawdziwie trudnym problemem jest zrozumienie natury tzw. osobliwości, w których załamują się dotychczas znane prawa fizyki. Być może rozwiązanie przyniosą próby zespolenia dwóch teorii o całkowicie odmiennej strukturze matematycznej, a mianowicie wspomnianej wyżej ogólnej teorii względności z mechaniką kwantową. Towarzyszyć temu może wypracowanie całkiem odmiennej geometrii, od tej, z którą spotykamy się na co dzień.

Chcąc wyjaśnić zagadnienie osobliwości, zacznijmy od pojęcia czasoprzestrzeni. Mówiąc prosto, stanowi ona obiekt geometryczny powstały na drodze połączenia przestrzeni trójwymiarowej (której szczególnym przypadkiem może być płaska przestrzeń euklidesowa) oraz jednowymiarowego czasu. Często określa się ją również jako continuum czasoprzestrzenne. Obiekt ten wyposażony jest w tzw. strukturę metryczną odpowiedzialną m.in. za możliwość dokonywania pomiarów odległości. Przy czym do wyrażenia na odległość między dwoma ustalonymi punktami wchodzi również przyrost czasu pomiędzy nimi, który mierzony jest np. w metrach, analogicznie jak w pomiarach długości znanych z życia codziennego. Dokonana w ten sposób geometryzacja pozwala na przedstawianie ewolucji danego układu fizycznego w postaci krzywej skierowanej w przyszłość. Każdemu punktowi takiej krzywej można przypisać czas własny oraz wartości trzech współrzędnych przestrzennych. Ze względu na skończoność maksymalnej wartości prędkości rozchodzenia się sygnałów fizycznych w czasie, każdemu punktowi czasoprzestrzeni odpowiada stożek świetlny i czasowy, wewnątrz którego możliwa jest dalsza ewolucja, zaś jego opuszczenie możliwe byłoby tylko przy prędkościach nadświetlnych. W ogólności pole grawitacyjne powoduje, iż czasoprzestrzeń, którą dostajemy po rozwiązaniu słynnych równań Einsteina dla danego pola grawitacyjnego, jest zakrzywiona – wtedy też stożki świetlne w rozmaity sposób pochylają się względem siebie. W szczególności rozwiązanie tych równań prowadzi do pewnych patologicznych sytuacji, które nazywamy właśnie osobliwościami. Może to być np. urywanie się pewnych krzywych oznaczające, iż po pewnym czasie informacje o układach reprezentowanych przez te krzywe są bezpowrotnie tracone. Ponadto np. w osobliwościach typu czarnych dziur krzywizna jest tak silna, że dane stożki świetlne pochylają się na tyle, by żaden sygnał fizyczny nie mógł się wydostać do wnętrza czasoprzestrzeni.

Interesujące są pewne własności dotyczące struktur przyczynowych czasoprzestrzeni, które mają związek z występowaniem osobliwości. Określenie tychże struktur może opierać się przykładowo na porządkowaniu danego zbioru stożków świetlnych, zależnie od tego, który z nich jest wcześniejszy. Zajmując się tym zagadnieniem, zauważyłem, iż ciekawe rezultaty daje rozważenie konfiguracji stożków wykazujących wiele cech samopodobieństwa. W tym celu wpierw na płaszczyźnie euklidesowej skonstruowałem na drodze rekurencyjnych odwzorowań odcinków – samopodobne figury zwane fraktalami. Odwzorowania, które wykorzystałem, były złożeniami obrotów i skalowania tychże odcinków. Następny krok polegał na utożsamieniu niektórych końców odcinków z punktami początkowymi krzywych w czasoprzestrzeni. Inne zaś końce utożsamiłem z punktami nie należącymi do samej czasoprzestrzeni, lecz do jej brzegu. W klasycznej teorii osobliwości kosmologicznej, jedną z prób badania własności tychże patologicznych „obiektów” było dołączenie ich do czasoprzestrzeni na brzegu w postaci tzw. punktów idealnych (np. punktów

Polskie Towarzystwo Fizyczne, wraz z Polskim Towarzystwem Chemicznym, ogłaszają konkurs pod nazwą

Komputerowo Wspomagany Eksperyment Szkolny w przedmiotach przyrodniczych.

W konkursie mogą uczestniczyć uczniowie szkoły średniej oraz w osobnej kategorii nauczyciele, studenci i pracownicy szkoły wyższej. Przedmiotem konkursu są doświadczenia, w których komputer będzie zastosowany jako przyrząd pomiarowy oraz maszyna matematyczna do przetwarzania wyników tego doświadczenia.

Zgłoszenia przyjmowane są do 1 maja 2003, a termin przesyłania omówień upływa 31 maja 2003.

Informacje szczegółowe dostępne są pod adresem ifnt.fizyka.amu.edu.pl/dydaktyka/konkurs2.htm

Rozwiązanie zadania M 1018.
Zauważmy, że

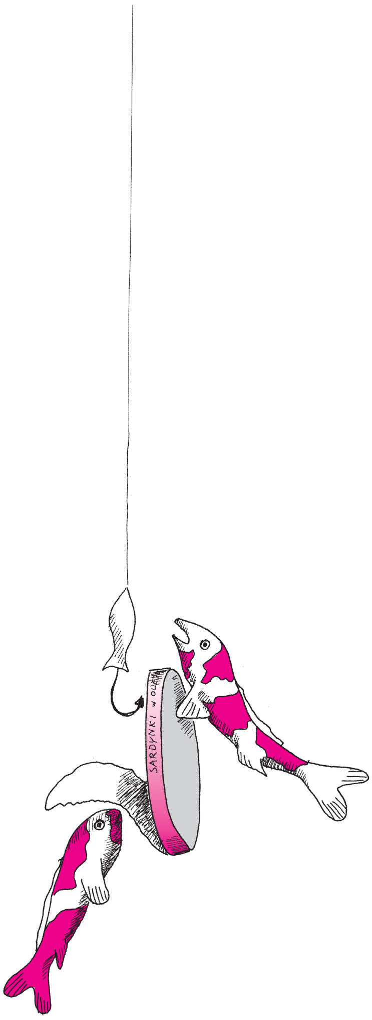
$$\frac{-\frac{-x}{x+1}}{\frac{-x}{x+1}+1} = x$$

oraz $\dfrac{-x}{x+1} > -1$ dla $x > -1$.
Wynika skąd, że

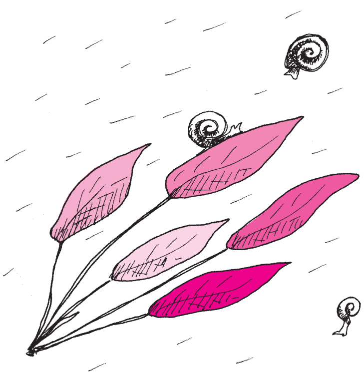
$$1 + f\left(\frac{-x}{x+1}\right) = f(x),$$

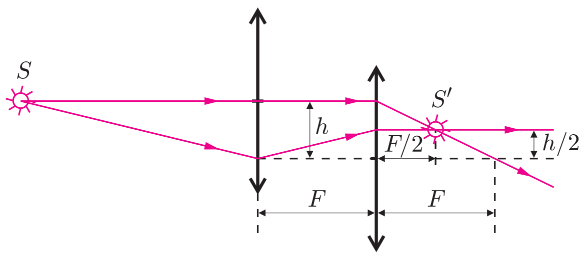
co przeczy równości podanej w zadaniu.

w nieskończoności). W mojej strukturze również przyjąłem, iż te końce krzywych, które należą do brzegu czasoprzestrzeni – stanowią osobliwości. Podejście takie umożliwiło mi znalezienie analogii pomiędzy niespełnieniem tzw. hipotezy kosmicznego cenzora a patologiami w strukturze przyczynowej (stożków świetlnych). W najprostszej wersji hipoteza ta głosi, że nie jest możliwe zaobserwowanie punktów osobliwych z wnętrza czasoprzestrzeni. W przypadku np. czarnych dziur osobliwości okryte są horyzontem zdarzeń, tak iż nie jest możliwe śledzenie dalszej ewolucji układu fizycznego, jeśli odpowiadająca mu krzywa przedostała się przez tenże horyzont. Wracając do mojego pomysłu, prowadzi on do wniosku, że ewentualne niespełnienie tejże hipotezy ujawnia się w braku możliwości pewnych rekurencyjnych uporządkowań stożków świetlnych. To z kolei jest analogiczne do ogólnie przyjętego stwierdzenia, że czasoprzestrzeń nie zawiera osobliwości (spełniających i niespełniających hipotezę kosmicznego cenzora), jeżeli każdą krzywą można dowolnie przedłużać zarówno w przeszłość, jak i w przyszłość. Inną analogią, którą zauważyłem, rozważając te struktury fraktalne, był związek pomiędzy przejściem od pojęcia przestrzeni (tzw. rozmaitości) płaskiej do zakrzywionej – a przejściem od czasoprzestrzeni modelowanej przez tzw. geometrię przemienną do nieprzemiennej. Na co dzień z własnością przemienności spotykamy się np. przy dodawaniu czy mnożeniu liczb rzeczywistych, natomiast nieprzemienne jest np. mnożenie macierzy. W przypadku czasoprzestrzeni niezerowa krzywizna prowadzi do tego, że operacja różniczkowania wykazuje swego rodzaju nieprzemienność. Natomiast, jak się okazuje, wykonywanie niektórych iteracji stożków świetlnych w nieskończoność prowadziłoby np. do występowania krzywych, które byłyby skierowane w przeszłość, lub też na przemian w przeszłość i w przyszłość, co z fizycznego punktu widzenia wydaje się być nierealistyczne. Takie patologie mogły by się ujawnić dopiero w bardzo małych skalach (np. rzędu rozmiarów planckowskich) po odpowiednim doborze przeskalowania zmniejszającego odcinki w mojej strukturze. Sugeruje to, hipotezę, iż w małych skalach przestaje obowiązywać znana geometria przestrzeni jako zbioru punktów w zwykłym znaczeniu. Od dawna bowiem przypuszcza się, że w pobliżu osobliwości zaczynają obowiązywać efekty kwantowej grawitacji, której pełna teoria jeszcze nie istnieje. W stadium rozwojowym są jednak pewne modele oparte na geometrii nieprzemiennej, w których próbuje się połączyć ogólną teorię względności z mechaniką kwantową. W modelach tych jednak nieprzemienność prowadzi do nieistnienia tychże punktów, a zatem także i czasu w ujęciu klasycznym. Dynamika układów modelowana jest przy użyciu zmieniających się stanów. Techniki fraktalne w pewien sposób wskazują na konieczność wyboru innej geometrii do opisu osobliwości – choć sformułowane zostały na gruncie pojęć teorii klasycznej.



Rozwiązanie zadania F 592.
Rozpatrzmy dwa promienie wychodzące ze źródła światła. Niech pierwszy biegnie wzdłuż osi optycznej pierwszej soczewki. Zatem na niej nie będzie załamany. Druga soczewka załamie go tak, że przetnie jej oś optyczną w jej ognisku. Niech drugi promień przechodzi przez punkt przecięcia płaszczyzny pierwszej soczewki z osią optyczną drugiej soczewki. Ponieważ odległość od źródła światła do pierwszej soczewki wynosi $2F$, promień ten po załamaniu będzie biegł symetrycznie do kierunku padania, a po drugim załamaniu będzie równoległy do osi optycznej drugiej soczewki (ponieważ wychodzi on z jej ogniska) – patrz rysunek poniżej.





Obraz źródła światła znajduje się więc w odległości $f/2$ od powierzchni drugiej soczewki i w odległości $h/2$ od osi optycznych obu soczewek. Otrzymujemy zatem: $SS' = \frac{1}{2}\sqrt{49F^2 + h^2}$.