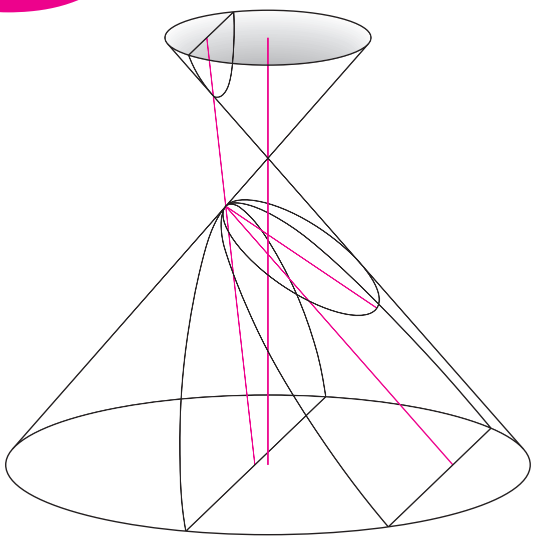
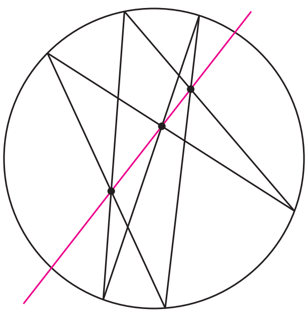
Stożkowe samą linijką



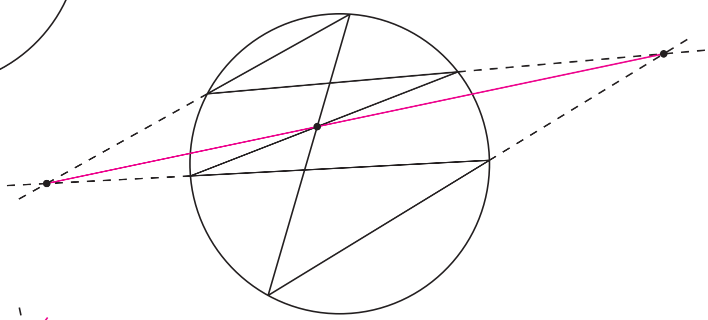
Stożkowe to elipsy, parabole i hiperbole. Nazwa bierze się stąd, że można każdą z nich uzyskać, przecinając stożek obrotowy płaszczyzną. Gdy płaszczyzna ta tworzy z osią stożka kąt większy niż jego tworzące – powstaje elipsa (przy kącie prostym – okrąg; to też jest elipsa, choć specjalna). Gdy te kąty są równe – parabola. A gdy kąt płaszczyzny z osią jest mniejszy – hiperbola (jak łatwo zauważyć, płaszczyzna przecina wtedy stożek po obu stronach wierzchołka).

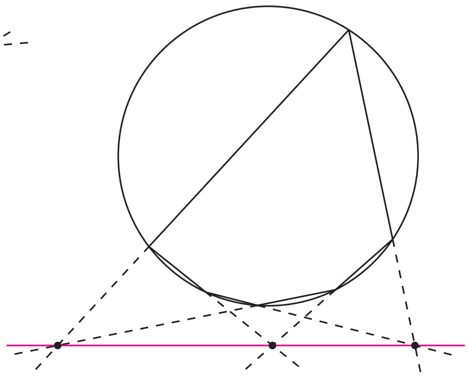
Pomysł, aby narysować stożkową samą linijką, wydaje się absurdalny. A jednak...

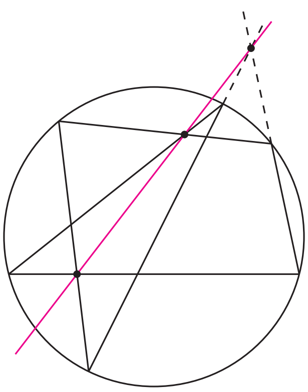
Zacznijmy od sprawy „prostszej”, choć nie mniej absurdalnej: narysować okrąg samą linijką. Jest to szczególny przypadek poprzedniego zadania.



W poprzednim numerze *Delty* Zdzisław Pogoda pisał o twierdzeniu Menelaosa i jego niezliczonych konsekwencjach. Wśród nich było dowiedzione twierdzenie Pascala, które brzmi:
Proste zawierające przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w okrąg, jeśli się przecinają, to na jednej prostej (nazywa się ją prostą Pascala). Oto kilka rysunków ilustrujących to twierdzenie (prosta Pascala jest narysowana kolorem).

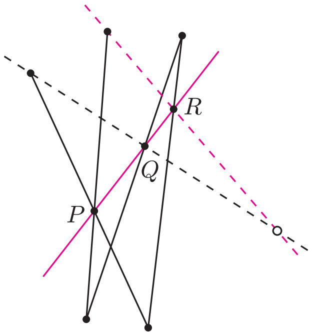




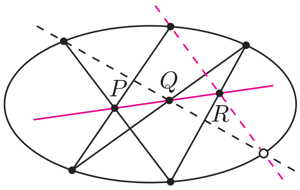


Twierdzenie to (również gdy nie pamięta się jego dowodu) pozwala na wykonanie czegoś bardzo zbliżonego do narysowania linijką okręgu. Gdy bowiem mamy pięć punktów leżących na okręgu, to samą linijką można skonstruować (jeśli istnieje) drugi punkt przecięcia tego okręgu z dowolnie narysowaną prostą przechodzącą przez jeden z nich. W ten sposób, zmieniając tę prostą możemy (samą linijką!) skonstruować tyle punktów tego okręgu, ile nam się spodoba. Ale jak to zrobić?

Zanim przeczyta się sąsiednią stronę – warto samemu spróbować rozwiązać to zadanie.

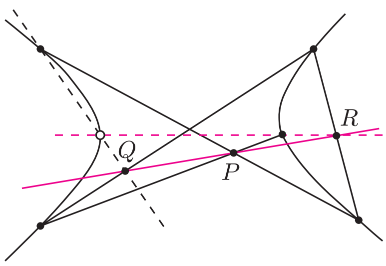


Oto przepis. Punkty łączymy w dowolnej kolejności łamaną złożoną z czterech odcinków (tu wybraliśmy taką kolejność, aby rysunek był mały). Oznaczamy przez P punkt przecięcia prostych zawierających jej pierwszy i czwarty bok. Teraz bierzemy jakąkolwiek prostą przez pierwszy z punktów (na rysunku jest przerywana) – to na niej znajdziemy drugi punkt nienarysowanego okręgu. Oznaczamy przez Q punkt jej przecięcia z prostą zawierającą trzeci bok łamanej. Prosta PQ (na rysunku ciągła kolorowa) przecina prostą zawierającą drugi bok łamanej w punkcie R. Prosta łącząca ostatni wierzchołek łamanej z punktem R (przerywana kolorowa) przecina czarną linię przerywaną w punkcie leżącym na nienarysowanym okręgu. (Gdyby któreś z przecinanych prostych okazały się równoległe, należy zmienić kolejność punktów i powtórzyć konstrukcję.)

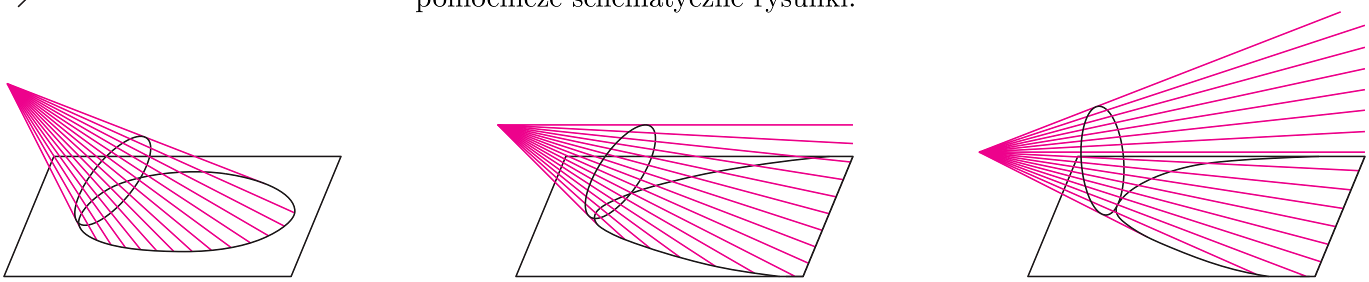


Dlaczego? Porównując otrzymany rysunek z pierwszym z rysunków ilustrujących na poprzedniej stronie twierdzenie Pascala, każdy z Czytelników z pewnością znajdzie odpowiedź. Podpowiemy może, że na rysunku jest sześciokąt i jego (narysowana ciągłą linią kolorową, jak na poprzedniej stronie) prosta Pascala.

A co będzie, gdy punkty obierzemy nie na okręgu, lecz byle jak, aby tylko żadne trzy nie leżały na jednej prostej? Przecież konstrukcja da się przeprowadzić i wtedy. Polecam sprawdzić to na kilku wybranych piątkach punktów, w każdym przypadku rysując po kilka przerywanych czarnych prostych. Obok nasze dwa przykłady.



Na kolejnym rysunku dorysowana dodatkowo została elipsa, a na następnym – hiperbola. To żart czy też dla nich twierdzenie Pascala, na którym opierała się konstrukcja, również jest prawdziwe? Tu akurat odpowiedź jest pozytywna i łatwa do uzyskania. Jeśli wyobrazimy sobie, że narysowany na sąsiedniej stronie stożek to promienie z punktowego źródła światła, to rysunek ten powinien przekonać nas, że każda ze stożkowych jest cieniem, jaki rzuca na płaszczyznę oświetlony punktowym źródłem światła okrąg. Dla tych, którzy nie zobaczyli, mamy pomocnicze schematyczne rysunki.



Jeśli więc mamy narysowaną sytuację z twierdzenia Pascala dla okręgu, to rzucając odpowiednio cień, otrzymamy taką samą sytuację dla elipsy, paraboli czy hiperboli. I w ten sposób przekonujemy się, że twierdzenie Pascala jest prawdziwe dla każdej stożkowej. Podana konstrukcja pozwala zatem, gdy dane jest pięć punktów dowolnej ze stożkowych, znajdować jej dalsze punkty na różnych prostych przechodzących przez jeden z nich.

Ale czy dowolne pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawsze leży na jednej ze stożkowych? Okazuje się, że tak, a fakt ten nazywa się twierdzeniem Braikenridge'a–Maclaurina. Tak więc przytoczona konstrukcja zawsze produkować będzie dowolną liczbę punktów jakiejś stożkowej.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS