

Gdzie strumyk płynie z wolna

Grzegorz DERFEL

Symbol \dot{x} oznacza prędkość,
a \ddot{x} – przyspieszenie.

Lepieżnik wyłusiał (*Petasites kablikianus*) to okazałych rozmiarów bylina porastająca brzegi górskich potoków. Jej bardzo duże liście pochylone nad wodą bywają częściowo zanurzone. W wyniku szczególnego splotu warunków zdarza się, że taki dotykający nurtu liść wpada w zamaszyste drgania. W zastygłym powietrzu wieczoru ten niespokojny ruch w zacisznym zakolu strumienia wydaje się czymś tajemniczym. Osobliwość tego zjawiska polega na tym, że oscylacje te wywołane są jednostajnym bodźcem, jakim jest przepływ wody.

Rezygnując z próby uwzględnienia całej złożoności drgań liścia, zbudujemy uproszczony jednowymiarowy model tego zjawiska. Jego istotną cechą będzie nieliniowość. W naszym modelu liść jest reprezentowany przez masę m , która może przesuwać się wzdłuż poziomej osi x . Masa jest częściowo zanurzona w wodzie płynącej z prędkością V w dodatnim kierunku osi x . Działa więc na nią siła oporu zależna od prędkości masy względem wody, $b(V - \dot{x})$, która powoduje wychylenie masy z położenia równowagi $x = 0$. Wychyleniu temu przeciwdziałają siła sprężysta równa $-kx$. Równanie ruchu masy ma postać

$$m\ddot{x} = -kx + b(V - \dot{x}).$$

Dla dalszych rozważań podzielimy obie strony przez m , otrzymując

$$(*) \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + B(V - \dot{x}),$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ oraz $B = b/m$. Istotne znaczenie ma fakt, że współczynnik B nie jest stały, ponieważ zależy od głębokości, na jaką liść się zanurza. Głębokość ta zmienia się, ponieważ wychylenia w poziomie wpływają na położenie liścia w pionie, tak że w rzeczywistości zatacza on zamkniętą krzywą o owalnym kształcie. Widać więc, że współczynnik oporu należałoby uzależniać od pionowej współrzędnej liścia, co wymagałoby rozpatrywania ruchu przynajmniej w dwóch wymiarach. Można jednak zauważyć, że zmiany głębokości zanurzenia mają podobny przebieg w czasie, jak zmiany poziomej prędkości liścia. Wykorzystamy to podobieństwo w naszym jednowymiarowym modelu i wyrazimy współczynnik oporu jako funkcję \dot{x} .

Kształt funkcji $B(\dot{x})$ pokazany na rysunku 1 uwzględnia fakt, że zmiany współczynnika B mają ograniczony zakres, nawet gdy prędkość osiąga duże wartości. W naszym modelu dla analitycznego przedstawienia funkcji $B(\dot{x})$ wykorzystamy – dość dowolnie – funkcję arcus tangens:

$$B(\dot{x}) = \beta - \gamma \arctg(\alpha \dot{x}),$$

gdzie α , β i γ są stałymi. Z powodu zależności współczynnika B od \dot{x} równanie (*) jest nieliniowe i niemożliwe do analitycznego rozwiązania. Jednak to dzięki zmienności B dochodzi do rozkołysania liścia. Gdy bowiem zrezygnujemy z niej, przyjmując $\gamma = 0$ lub $\alpha = 0$, czyli $B = \beta$, dostajemy liniowe równanie różniczkowe

$$(**) \quad \ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \beta V,$$

które przewiduje, że po nieskończenie długim czasie ruch zamiera. Odpowiednie rozwiązanie ma postać zależną od relacji między ω_0 a wielkością $\lambda = \beta/2$. Gdy $\omega_0^2 - \lambda^2 > 0$, opisuje ono drgania o częstotliwości

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

zanikające w położeniu równowagi $x_s = \beta V / \omega_0^2$:

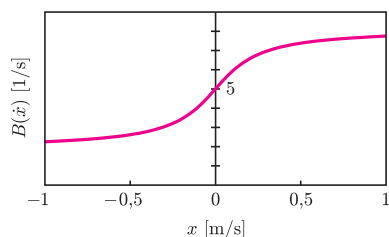
$$x(t) = x_s + A \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi),$$

gdzie A i ϕ są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

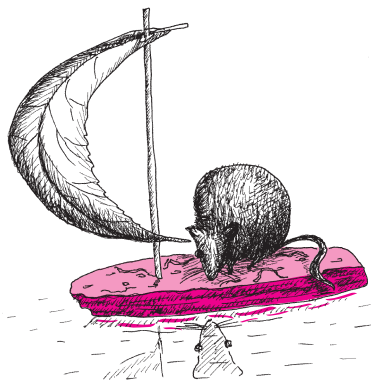
W przeciwnym przypadku rozwiązanie przewiduje aperiodyczny ruch także zmierzający do x_s . (Oczywiście proporcjonalność x_s do V jest ograniczona do prędkości prądu, przy których liść nie łamie się i nie niszczy.)

Aby zbadać charakter rozwiązań nieliniowego równania (*) uwzględniającego $\gamma \neq 0$ i $\alpha \neq 0$, rozważmy małe wychylenia ξ z położenia x_s :

$$x(t) = x_s + \xi(t).$$



Rys. 1



Wykorzystując fakt, że prędkości $\dot{x}(t) = \dot{\xi}(t)$ również są małe, można użyć przybliżenia

$$B(\dot{x}) \approx \beta + \gamma\alpha\dot{x} = \beta + \gamma\alpha\dot{\xi}.$$

Pomijamy też pojawiający się w równaniu (*) składnik z $\dot{\xi}^2$. W efekcie otrzymujemy znów rozwiązywalne równanie liniowe

$$(***) \quad \ddot{\xi} + (\beta - \gamma\alpha V)\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0.$$

Jego rozwiązanie ma cechy podobne do rozwiązania równania (**).

W szczególności gdy

$$\omega_0^2 - (\beta - \gamma\alpha V)^2 > 0,$$

zawiera ono czynnik wykładniczy, tym razem z wykładnikiem $\lambda = (\beta - \gamma\alpha V)/2$, którego znak zależy od prędkości prądu:

$$\xi(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi).$$

W wodzie stojącej lub płynącej leniwie współczynnik λ jest dodatni i kołysanie liścia ustaje. Jednak gdy prędkość nurtu przekracza wartość krytyczną $V_k = \beta/(\gamma\alpha)$, czynnik wykładniczy rośnie z czasem, co odpowiada wahaniom narastającym.

(Stosownie do upraszczających założeń poczynionych przy wyprowadzeniu równania (***) wynik ten jest poprawny tylko dla małych drgań, więc nie należy przywiązywać wagi do sugerowanego funkcją eksponencjalną wzmagania się drgań w nieskończoność.)

Pora teraz na – numeryczne z konieczności – rozwiązanie pełnego nieliniowego równania ruchu (*). Trzeba tylko ustalić w miarę realistyczne wartości parametrów układu. Rozsądne wydaje się przyjęcie $m = 0,02$ kg i $k = 0,5$ N/m. Swobodny liść kołysze się wtedy z okresem około 1,25 s. Parametry α , β i γ można dobrać tak, aby ruch wyglądał jak najbardziej prawdopodobnie, np. $\alpha = 5$ s/m, $\beta = 5$ s⁻¹ i $\gamma = 2$ s⁻¹, co daje prędkość krytyczną około 0,5 m/s. Przykłady rozwiązań $x(t)$ przedstawione są na rysunku 2.

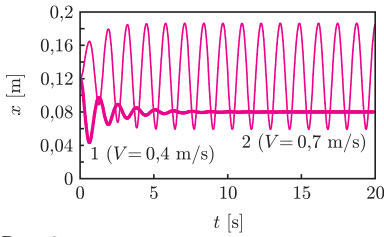
Liść zanurzony w powoli płynącym potoku nie kołysze się trwale – początkowo wychylony szybko uspokaja się (krzywa 1). W bystrzejszym nurcie równie szybko ustalają się znaczne wahania (krzywa 2). Rysunek 3 przedstawia zależność ich amplitudy od prędkości wody.

Progowy charakter wzbudzenia drgań jest wyraźnie widoczny. Energia rozkołysanego liścia pochodzi z niewyczerpalnego praktycznie źródła, jakim jest przepływ wody.

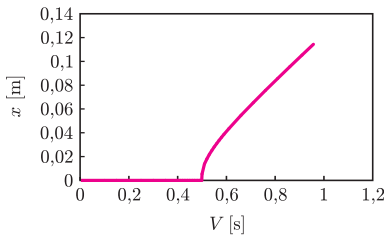
Z powyższej analizy wynika, że jeśli prędkość prądu jest mała, to istnieje położenie równowagi, w którym liść spoczywa i do którego asymptotycznie zmierza po dowolnym wychyleniu. Takie dążenie można przedstawić w płaszczyźnie (x, \dot{x}) – tak zwanej przestrzeni fazowej (rys. 4).

Punkt równowagi osiągnany po długim czasie jest przykładem atraktora zwanego ogniskiem. „Przyciąga” on stany układu zadane dowolnymi warunkami początkowymi (krzywa 1). Jeśli natomiast prędkość wody przewyższa krytyczną, to wspomniane położenie równowagi przestaje istnieć. W jego miejsce pojawia się atraktor w postaci zamkniętej krzywej zwany cyklem granicznym. Tory na płaszczyźnie fazowej zbliżają się do niego od wewnątrz (jak krzywa 2) lub z zewnątrz (jak krzywa 3), zależnie od warunków początkowych.

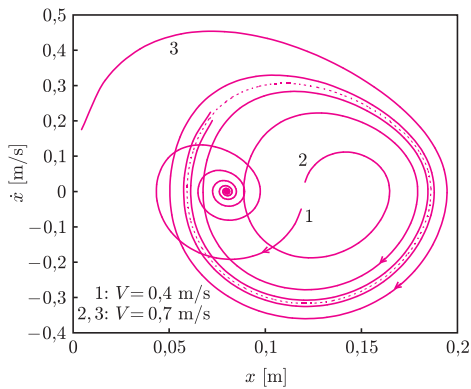
Zachowanie układu polegające na zastąpieniu punktu stałego cyklem granicznym odpowiadającym ruchowi okresowemu wskutek zmiany parametrów układu nosi nazwę bifurkacji Hopfa. Bifurkacja Hopfa jest często spotykana w zachowaniu nieliniowych układów fizycznych, chemicznych i biologicznych. Praktyczne znaczenie ma np. bifurkacja prowadząca do wzbudzenia wibracji skrzydła samolotu lub wału turbiny, co może mieć katastrofalne następstwa. Kołysanie liścia lepiężnika jest niegroźnym przypadkiem, do którego obserwacji zachęcam miłośników górskiej przyrody.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4