KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (1)

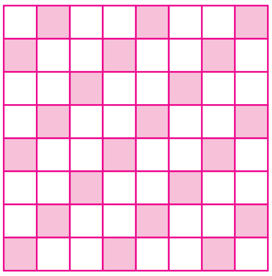
Zadanie 1: Na szachownicy 8×8 ułożono 21 klocków o wymiarach 3×1 tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 3 pola. Które z pól mogło pozostać wolne?

Rozwiązanie I: Pokolorujmy (dla przejrzystości zamiast kolorować numerujemy) pola szachownicy jak na rysunku 1. Każdy klocek pokrywa pola z numerami 1, 2, 3.

Ponieważ na szachownicy są 22 pola z liczbą 2, pozostać niepokryte musi jedno z pól z takim właśnie numerem (rys. 2). Ale które?

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Rys. 1



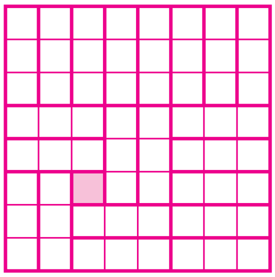
Rys. 2

Ponumerujmy teraz pola szachownicy w nieco inny sposób (rys. 3). I tym razem są 22 pola z numerem 2, więc tylko takie pole może zostać niepokryte. To pozostawia nam cztery pola (a tak uczciwie mówiąc, to istotnie tylko jedno, ze względu na symetrię).

Nietrudno wypełnić szachownicę klockami tak, aby niepokryte pozostało to właśnie pole (rys. 4).

2	3	1	**2**	3	1	**2**	3
1	**2**	3	1	**2**	3	1	**2**
3	1	**2**	3	1	**2**	3	1
2	3	1	**2**	3	1	**2**	3
1	**2**	3	1	**2**	3	1	**2**
3	1	**2**	3	1	**2**	3	1
2	3	1	**2**	3	1	**2**	3
1	**2**	3	1	**2**	3	1	**2**

Rys. 3



Rys. 4

Rozwiązanie II: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rys. 5. Wówczas każdy klocek pokrywa pola o sumie liczb równej 2. Suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 44, a ponadto 21 klocków pokrywa pola o sumie liczb 42. Niepokryte zostaje więc pole z liczbą 2.

1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Rys. 5

Zadanie 2: Na szachownicy 8×8 ułożono 12 klocków o wymiarach 5×1 tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 5 pól. Które cztery pola pozostały niepokryte?

Rozwiązanie: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rys. 6. Wówczas każdy klocek pokrywa pola o sumie liczb równej 6, zatem 12 klocków pokrywa pola o sumie liczb 72. Suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 84. Niepokryte zostają więc pola z sumą liczb równą 12, zatem muszą to być cztery pola z liczbą 3 położone w środku szachownicy. Podanie przykładu ułożenia klocków pozostawiamy Czytelnikowi.

2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2
0	0	0	3	3	0	0	0
0	0	0	3	3	0	0	0
2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2

Rys. 6

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (35′)

Wyjaśnienie oszustwa (35): Błędny jest dowód tego, że z prawdziwości twierdzenia dla $n = 3$ wynika prawdziwość dla $n + 1 = 4$.

Błąd polega na tym, że wówczas dowolne $n - 1 = 2$ punkty spośród danych czterech są współliniowe, ale nie można mówić o prostej wyznaczonej przez punkt(y) $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2} = A_1$, gdyż pojedynczy punkt prostej nie wyznacza.

Poza tym jednym błędnym wynikaniem (oraz tym, że dla $n = 2$ i $n = 3$ prawdziwość twierdzenia uzyskujemy bez indukcji), dowód jest poprawny. Jeśli jakoś dobrniemy do $n = 4$, czyli jeśli jakoś udowodnimy lub założymy, że dowolne cztery punkty przestrzeni, w której żyjemy, leżą w jednej płaszczyźnie, to teza twierdzenia jest prawdziwa dla każdego n, a przedstawiony poprzednio dowód jak najbardziej poprawny! Poprawnie udowodnione jest bowiem wynikanie tezy twierdzenia dla $n + 1$ z tezy dla n, dla każdego $n \geqslant 4$. No cóż, indukcja jest jak łańcuch: jeśli na 1000000 ogniw wytrzyma 999999, to nie jest to powód do specjalnej radości.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl