O pewnej idei Fermata

Lev KOURLIANDTCHIK

Rozważmy następujące trzy zadania.

Zadanie 1. Udowodnić, że równanie
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$$
nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 2. Ciężar każdego z $2n+1$ klocków wyraża się całkowitą liczbą gramów. Dowolne $2n$ klocków można tak rozdzielić, kładąc po n na każdą szalkę, że nastąpi równowaga. Udowodnić, że wszystkie klocki mają jednakową wagę.

Zadanie 3. Dany jest arkusz papieru w kratkę. Udowodnić, że dla $n \neq 4$ nie istnieje n-kąt foremny o wierzchołkach znajdujących się w węzłach kraty. Na pierwszy rzut oka zadania te nie mają nic wspólnego. Jak sami jednak zobaczycie, rozwiązania wszystkich tych zadań opierają się na tej samej idei, którą wymyślił Pierre Fermat. Można przypuszczać, że właśnie za pomocą tej idei starał się on udowodnić swoje słynne Wielkie Twierdzenie.

Ale po kolei.

Najpierw rozwiążemy trzy podane wyżej zadania.

Rozwiązanie zadania 1. Niech liczby x, y, z, u spełniają wypisane wyżej równanie. Ponieważ liczba $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ jest parzysta, to wśród liczb x, y, z, u jest parzysta liczba liczb nieparzystych, czyli cztery lub dwie, lub zero. Jeżeli wszystkie liczby są nieparzyste, to liczba $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ jest podzielna przez 4, a liczba $2xyzu$ nie jest podzielna przez 4. Jeżeli są wśród nich tylko dwie liczby nieparzyste, to liczba $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ nie jest podzielna przez 4, a liczba $2xyzu$ jest podzielna przez 4. Zatem wszystkie liczby są parzyste, czyli
$$x = 2x_1, \quad y = 2y_1, \quad z = 2z_1, \quad u = 2u_1.$$
Podstawiając te równości do równania wyjściowego, otrzymujemy
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1.$$
Znów widzimy, że nie mogą być nieparzyste wszystkie cztery liczby, bo wtedy liczba $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ nie byłaby podzielna przez 8. Analogicznie nie mogą być nieparzystymi dokładnie dwie liczby, ponieważ wtedy liczba $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ nie byłaby podzielna przez 4. Otrzymujemy więc, że wszystkie liczby są parzyste, czyli
$$x_1 = 2x_2, \quad y_1 = 2y_2, \quad z_1 = 2z_2, \quad u_1 = 2u_2.$$
Dlatego
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2.$$

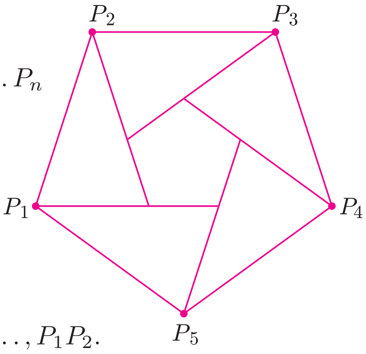
Rozumując w podobny sposób, dowodzimy, że liczby x_2, y_2, z_2, u_2 są parzyste i tak dalej. Łatwo jest zrozumieć, że dla każdej liczby naturalnej s zachodzi równość
$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 + u_s^2 = 2^{2s+1}x_sy_sz_su_s,$$
przy czym
$$x_k = 2x_{k+1}, y_k = 2y_{k+1}, z_k = 2z_{k+1}, u_k = 2u_{k+1}, \ k \geqslant 1.$$
Czyli dla każdej liczby naturalnej s liczby
$$\frac{x}{2^s}, \quad \frac{y}{2^s}, \quad \frac{z}{2^s}, \quad \frac{u}{2^s}$$
są całkowite. Ale to jest niemożliwe.

Rozwiązanie zadania 2. Po pierwsze, oczywiste jest, że wszystkie klocki mają parzystą lub nieparzystą wagę: waga każdych $2n$ klocków jest parzysta. Odejmiemy teraz od wag wszystkich klocków wagę najlżejszego klocka (lub najlżejszych klocków, jeżeli jest ich kilka). Nowy układ klocków oczywiście też spełnia warunki zadania, przy czym wśród klocków będą „klocki o wadze zerowej”. Dlatego wagi wszystkich klocków nowego układu są parzyste. Dzieląc te wagi na pół, otrzymamy nowy układ klocków, spełniający warunki zadania, przy czym wśród klocków są „klocki o wadze zerowej”. A zatem znowu waga wszystkich klocków wyraża się liczbą parzystą i tak dalej.

Wynika stąd, że w końcu wszystkie klocki mają zerową wagę, a to oznacza, że wszystkie klocki z zadania wyjściowego mają jednakową wagę.

Rozwiązanie zadania 3. Udowodnijmy najpierw, że nie istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach znajdujących się w węzłach. Przyjmujemy bok kratki jako jednostkę. Rzeczywiście, niech a będzie bokiem tego trójkąta. Wtedy pole tego trójkąta równa się $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i jest ono liczbą niewymierną, gdyż a^2 jest liczbą całkowitą, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa. Z drugiej zaś strony jest oczywiste, że pole każdego wielokąta o wierzchołkach w węzłach kraty jest liczbą wymierną.

Ponieważ w sześciokąt foremny można wpisać trójkąt równoboczny o wierzchołkach znajdujących się w wierzchołkach sześciokąta, to dla $n = 6$ stwierdzenie też jest udowodnione.



Niech $n \neq 3, 4, 6$. Przypuśćmy, że $P_1P_2 \ldots P_n$ jest n-kątem o wierzchołkach znajdujących się w węzłach. Odłóżmy w punktach $P_1, P_2, \ldots, P_n$ wektory, równe odpowiednio wektorom $P_2P_3, P_3P_4, \ldots, P_1P_2$.

Nowe punkty znowu trafią do węzłów kraty i utworzą n-kąt foremny wewnątrz n-kąta wyjściowego. Z nowym n-kątem możemy postąpić w ten sam sposób, i tak dalej bez końca. Jednakże kwadrat boku n-kąta jest liczbą naturalną, w naszym zaś przypadku ciągle się ona zmniejsza!

Wszystkie trzy rozwiązania w istocie rzeczy były przeprowadzone według jednego schematu: zakładając, że problem ma rozwiązanie, konstruowaliśmy pewien nieskończony proces, podczas gdy ze sformułowania problemu wynikało, że proces ten musi gdzieś mieć koniec. Taka metoda dowodzenia nazywa się *metodą nieskończonej regresji*.

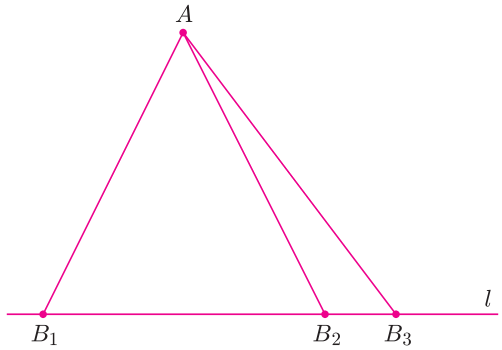
Często metodę regresji stosuje się w prostszej wersji. Zakładając mianowicie, że już dotarliśmy do naturalnego końca procesu, widzimy, iż „zatrzymać się" nie możemy.

Zadanie 4. Jeżeli każda prosta łącząca jakiekolwiek dwa punkty pewnego skończonego zbioru X zawiera przynajmniej jeszcze jeden punkt tego zbioru, to wszystkie punkty zbioru leżą na tej samej prostej.

Rozwiązanie. Załóżmy, że nie wszystkie punkty zbioru leżą na jednej prostej. Dla każdego punktu A i dla każdej prostej l przechodzącej przez dwa punkty zbioru X, na której A nie leży, rozważmy liczbę $\rho(A,l)$ równą odległości punktu A od prostej l. Ponieważ punktów i prostych jest skończenie wiele, to wśród tych odległości jest odległość najmniejsza.

Niech więc liczba $\rho(A,l)$ będzie najmniejsza wśród tych liczb. Wówczas dla B_1, B_2, B_3 należących do $l \cap X$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_{AB_1B_3} &= \rho(A,l)\cdot |B_1B_3| = \\ &= \rho(B_2, AB_1)\cdot |AB_1| + \rho(B_2, AB_3)\cdot |AB_3| \geqslant \\ &\geqslant \min\left(\rho(B_2,AB_1), \rho(B_2,AB_3)\right)\cdot(|AB_1|+|AB_3|) > \\ &> \min\left(\rho(B_2,AB_1), \rho(B_2,AB_3)\right)\cdot |B_1B_3|\,. \end{aligned}$$



Stąd

$$\rho(A,l) > \min\left(\rho(B_2,AB_1), \rho(B_2,AB_3)\right),$$

co przeczy wyborowi punktu A i prostej l.

A teraz rozważmy bardziej skomplikowany przykład geometryczny.

Zadanie 5. Czy można rozciąć sześcian na kilka różnych sześcianów?

Rozwiązanie. Zróbmy najpierw pewne oczywiste spostrzeżenie. Niech kwadrat P będzie podzielony na skończoną liczbę różnych kwadratów. Wtedy najmniejszy kwadracik nie będzie przylegał do granicy kwadratu P.

Niech sześcian Q będzie rozcięty na różne sześciany Q_j, natomiast P będzie jedną ze ścian sześcianu Q. Sześciany Q_j, przylegające do ściany P, tworzą rozbicie P na parami różne kwadraty. Niech P_1 będzie najmniejszym wśród tych kwadratów, a Q_1 niech będzie odpowiadającym mu sześcianem. Kwadrat P_1 nie przylega do granicy P, a więc jest otoczony dużymi kwadratami. Odpowiednie sześciany tworzą „studnię", w której leży sześcian Q_1.

Niech P_1' będzie „górną" ścianą sześcianu Q_1. Sześciany przylegające do ściany P_1' tworzą rozbicie P_1' na różne kwadraty. Znowu najmniejszy kwadrat wśród nich, P_2, znajduje się wewnątrz P_1', a więc sześciany otaczające odpowiedni sześcian Q_2 będą większe od Q_2 i znowu tworzą „studnię". Możemy przedłużać tę konstrukcję, otrzymując „wieżę", która składa się z sześcianów ciągle malejących, a więc nie możemy w żadnej chwili tego procesu zatrzymać!

⋆ ⋆ ⋆

Na koniec proponujemy Czytelnikowi kilka zadań do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 6. Udowodnić, że równanie

$$x^4 + y^4 = z^4$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 7. Niech

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

będzie zbiorem liczb całkowitych, z których nie wszystkie są jednakowe ($n > 2$). Utworzymy nowy zbiór postaci

$$\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2},$$

a z niego według tej samej reguły następny zbiór i tak dalej. Udowodnić, że po kilku krokach powstanie zbiór, w którym nie wszystkie liczby będą całkowite.

Zadanie 8. Niech

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$$

będzie dowolnym 2^n-elementowym zbiorem liczb naturalnych. Udowodnić, że jeśli utworzymy z niego nowy zbiór

$$l_1, l_2, \ldots, l_{2^n}$$

według reguły

$$l_k = |a_{k+1} - a_k|, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^n, \quad a_{2^n+1} = a_1,$$

a z niego według tej samej reguły następny zbiór i tak dalej, to po pewnej liczbie kroków dojdziemy do zbioru, który składa się wyłącznie z zer.

Zadanie 9. Dowolne dwie proste, należące do pewnego skończonego zbioru prostych, przecinają się. Przez każdy z punktów przecięcia przechodzi jeszcze przynajmniej jedna należąca do tego zbioru prosta. Wykazać, że wtedy wszystkie rozważane proste przechodzą przez jeden wspólny punkt.