Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2003

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 455, 456

Redaguje Marcin E. KUCZMA

455. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| > |AC|$. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A przecina okrąg opisany na tym trójkącie ponownie w punkcie E. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu E na bok AB. Dowieść, że $|AB| - |AC| = 2|AF|$.

456. Czy istnieją takie liczby niewymierne $\alpha > 1$, $\beta > 1$, że dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność $\lfloor \alpha^m \rfloor \neq \lfloor \beta^n \rfloor$? (Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą, która nie przekracza liczby x).

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2002

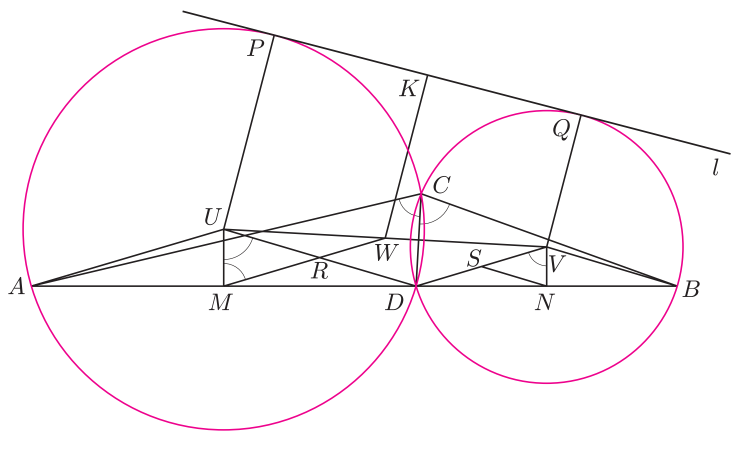
Przypominamy treść zadań:

447. Odcinek CD jest dwusieczną kąta C trójkąta ABC. Prosta ℓ jest styczna do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD w punktach P i Q. Dowieść, że jest ona także styczna do okręgu przechodzącego przez środki odcinków AD, BD i PQ.

448. Udowodnić, że dla każdej czwórki liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność
$$\frac{b-a}{d+a} + \frac{c-b}{a+b} + \frac{d-c}{b+c} + \frac{a-d}{c+d} \geqslant 0.$$

447. Są dwie takie styczne. Rysunek odpowiada sytuacji, gdy odcinek PQ oraz punkt C leżą po tej samej stronie prostej AB, ale przedstawione rozumowanie działa i dla drugiej z tych stycznych.

Oznaczmy środki okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD odpowiednio przez U i V, a środki odcinków PQ, AD, BD, UD, VD, UV – odpowiednio przez K, M, N, R, S, W oraz przyjmijmy
$$\varphi = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DUM| = \\ = |\sphericalangle DVN| = |\sphericalangle UMR|.$$
Odcinek RW, łączący środki boków trójkąta DUV, jest równoległy do boku DV; zatem
$$|\sphericalangle URM| + |\sphericalangle URW| = |\sphericalangle URM| + |\sphericalangle UDV| = \\ = (180^\circ - 2\varphi) + 2\varphi = 180^\circ,$$
skąd wynika, że punkty M, R, W są współliniowe.



Punkty K i W są środkami nierównoległych boków trapezu $PUVQ$, więc
$$|WK| = \frac{|VQ| + |UP|}{2} = \frac{|VD|}{2} + \frac{|UD|}{2} = \\ = |WR| + |RM| = |WM|.$$
Analogicznie stwierdzamy, że $|WK| = |WN|$. To znaczy, że W jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie KMN; skoro zaś $WK \perp \ell$, okrąg ten jest styczny do prostej ℓ.

448. Wprowadźmy oznaczenia
$$d+a = A,\quad a+b = B,\quad b+c = C,\quad c+d = D,$$
$$b+d = P,\quad a+c = Q.$$
Rozważane w zadaniu wyrażenie ma wartość
$$W = \frac{P-A}{A} + \frac{Q-B}{B} + \frac{P-C}{C} + \frac{Q-D}{D} = \\ = P\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C}\right) + Q\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{D}\right) - 4.$$
A ponieważ
$$\frac{1}{A} + \frac{1}{C} \geqslant \frac{4}{A+C}$$
(nierówność między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną liczb A, C) i podobnie
$$\frac{1}{B} + \frac{1}{D} \geqslant \frac{4}{B+D},$$
zatem
$$W \geqslant \frac{4P}{A+C} + \frac{4Q}{B+D} - 4 = \\ = \frac{4P}{P+Q} + \frac{4Q}{P+Q} - 4 = 0.$$

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **443** ($WT = 1{,}70$) i **444** ($WT = 1{,}95$)
z numeru 6/2002

Bartłomiej Dyda	–	2 - 45,69
Piotr Kumor	–	6 - 45,39
Tomasz Rawlik	–	4 - 43,02
Marcin Peczarski	–	2 - 42,30
Janusz Olszewski	–	5 - 34,77
Wojciech Maciak	–	34,30
Marian Łupieżowiec	–	34,24
Nikodem Szpak	–	33,42
Marcin Kasperski	–	2 - 33,10
Krzysztof Jasek	–	32,63
Tomasz Wietecha	–	5 - 31,65
Światosław Gal	–	30,94
Zbigniew Sewartowski	–	30,76
Jerzy Cisło	–	1 - 30,24
Michał Jóźwikowski	–	27,33
Lech Duraj	–	25,00
Monika Nagórko	–	24,70
Andrzej Nagórko	–	23,40
Paweł Walter	–	23,40
Łukasz Kamiński	–	22,98
Marek Prauza	–	3 - 20,73

Legenda (przykładowo): stan konta 5-34,77 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 34,77 punktów.

Listę otwierają: **Bartłomiej Dyda**, który przekracza próg 44 po raz trzeci (i zostaje dwudziestym trzecim Weteranem Klubu 44 M) oraz Weteran **Piotr Kumor**, kończący już siódmą rundę!

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2000, 2001 lub 2002.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, ktorzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Klub 44 M liczy 97 członków. Okrągła liczba 100 staje się coraz bardziej realna. Kiedy? Kto? Czy w omówieniu za rok będzie można napisać, że liczba członków jest już trzycyfrowa? Czy nazwisko setnej osoby jest jednym z nazwisk widocznych na publikowanej, jak co roku, liście uczestników ze stanem konta ponad 20? Nie jest to oczywiste, bo choć prawie co miesiąc ktoś przekracza czterdziestoczteropunktową barierę, to w większości są dawno zarejestrowani uczestnicy, wytrwale pokonujący okrążenie za okrążeniem. Rośnie grono Weteranów, także tych „wielokrotnych”. Czy ktoś okaże tyle wytrwałości, by wypełnić trzykrotną normę weterańską?

Jak w ubiegłych latach, spotkaliśmy się we wrześniu w Warszawie w gronie kilku członków Klubu 44 M, którym czas na to pozwolił. Była, jak zwykle, sesja „szybkiego rozwiązywania zadań”, otwarta dla publiczności i wkomponowana w ciąg imprez VI Festiwalu Nauki; no i dobrych kilka godzin spędziliśmy na swobodnej, miłej rozmowie o *Delcie* i *Lidze*, o konkursach zadaniowych, o szkołach i uczelniach, o książkach i czasopismach, o matematyce i o życiu.

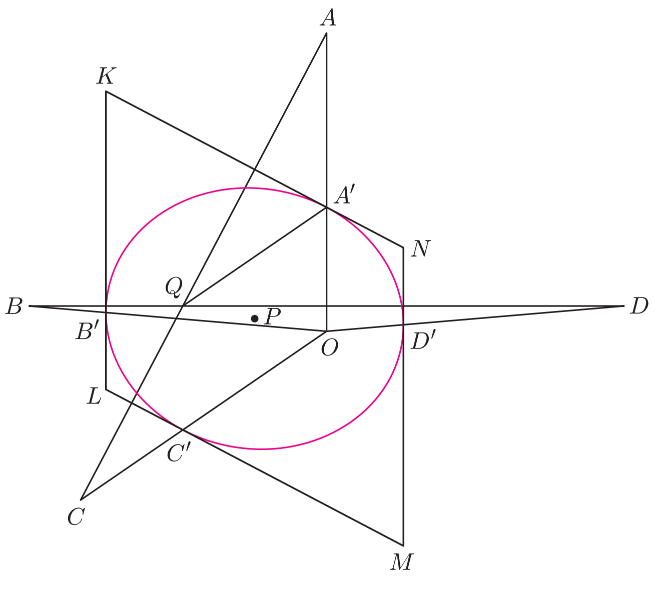
A teraz doroczne omówienie wybranych zadań: patrzymy, co ciekawego zaprezentowali w swych rozwiązaniach uczestnicy ligi i które zadania okazały się najtrudniejsze (niewielkie liczby poprawnych rozwiązań).

Zadanie **425.** [$X \in \operatorname{int}(ABCD)$: $|\sphericalangle ADX| = |\sphericalangle BCX| < 90^\circ$, $|\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle CBX| < 90^\circ$; symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie $Y \Rightarrow |\sphericalangle AYB| = 2|\sphericalangle ADX|$] (współczynnik trudności WT=3,01; liczba poprawnych rozwiązań LPR=5). Jeden z uczestników wyraził uznanie: „to bardzo ciekawe zadanie”. Zadanie, choć ciekawe, nie było dobre. Dlaczego? Rozwiązanie firmowe było rachunkowe (liczby zespolone). Tę samą metodę zastosował **L. Grzanka**; a **M. Peczarski** oraz **M. Spychała** użyli trygonometrii. Pozostałe dwa rozwiązania (**W. Bednorz** i **T. Wietecha**) były „czysto geometryczne”, więc takie, jakie chciałoby się oglądać. Ale w tym akurat zadaniu ta „czysta” metoda była dłuższa, a ponadto wymagała rozpatrzenia różnych możliwości usytuowania rozważanych punktów i odcinków. Jak zwykle w takich razach, można napisać „w innych przypadkach modyfikacje są oczywiste” (czy aby na pewno?) – lub konsekwentnie rozważać odcinki i kąty zorientowane. Przy tym ostatnim podejściu, tak jak w rozwiązaniach analitycznych i trygonometrycznych, problemy uzależnienia od przypadku gładko znikają; wszelako – zacytujmy słowa I. F. Szarygina z przedmowy do jednej z jego książek – *gładko znika wówczas także i sama geometria.*

Zadanie **428.** [$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$; dla $J \subset \{1, \ldots, n\}$: $s_J := \sum_{j \in J} a_j \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_J s_J^2 \leqslant (n+1)2^{n-2} \sum_j a_j^2$] ($WT$=1,02; LPR=14). Jak widać, dużo dobrych rozwiązań – wśród nich kilka prostszych od firmowego. Chyba najzgrabniej przedstawił to **M. Adamaszek**: rozwijamy kwadraty sum s_J i dodajemy, otrzymując składniki typu a_j^2, z których każdy pojawia się 2^{n-1} razy, oraz składniki $2a_ia_j$ ($i < j$), każdy występujący 2^{n-2} razy; teza jest więc równoważna nierówności

$$2^{n-1} \sum_j a_j^2 + 2^{n-2} \sum_{i<j} 2a_ia_j \leqslant (n+1)2^{n-2} \sum_j a_j^2,$$

czyli, po przekształceniu, $\sum_{i<j} (a_i - a_j)^2 \geqslant 0.$



Zadanie **429.** [Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O; $AC \cap BD = \{Q\}$; K, L, M, N – środki okręgów (QAB), (QBC), (QCD), (QDA); $KM \cap LN = \{P\} \Rightarrow$ $\Rightarrow O$, P, Q współliniowe] (WT=2,58; LPR=6). Ciekawy wariant rozwiązania firmowego przedstawił **J. Olszewski**: czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem zawierającym punkt O; odcinki OA, OB, OC, OD przecinają jego brzeg w punktach A', B', C', D' tak, że $|OA'| + |QA'| = |OA'| + |AA'| = \text{promień } (ABCD) = |OB'| + |QB'| = |OC'| + |QC'| = |OD'| + |QD'|$, a zatem punkty A', B', C', D' leżą na elipsie o ogniskach O, Q (rysunek); przy tym $|\sphericalangle NA'O| = |\sphericalangle AA'K| = |\sphericalangle QA'K|$, więc elipsa jest styczna do boku NK – jest też styczna do pozostałych boków równoległoboku $KLMN$ – skąd nietrudny wniosek, że równoległobok $KLMN$ jest swoim własnym obrazem w symetrii względem środka P' owej elipsy; zatem $P = P' = \text{środek } OQ$.

Weterani **Klubu 44 M**
(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana)

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (7), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (5), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (5), T. Józefczyk, J. Witkowski, W. Bednorz, B. Dyda

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M**
(alfabetycznie)

„dwukrotni”

M. Adamaszek, Z. Bartold, W. Bednarek, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, P. Kubit, K. Patkowski, M. Peczarski, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”

T. Biegański, W. Boratyński, J. Cisło, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Rozwiązanie zadania M 1015.
Wykażemy, że

$$(*)\ 10^b \text{ dzieli } a_n+1 \Longrightarrow 10^{2b} \text{ dzieli } a_{n+1}+1.$$

Rzeczywiście, jeśli $a_n = k\cdot 10^b - 1$, to

$$a_{n+1} \equiv (k\cdot 10^b-1)^3(3(k\cdot 10^b-1)+4) \equiv$$
$$\equiv (3k\cdot 10^b-1)(3k\cdot 10^b+1) \equiv 1 (\bmod 10^{2b}).$$

Ponieważ $10|a_0+1$, więc z $(*)$ wynika, że $10^2|a_1+1$ i przez indukcję $10^{2^n}|a_n+1$. Zatem a_{10} kończy się co najmniej 1024 dziewiątkami.

Rozwiązanie zadania M 1016.
$7\cdot 0{,}143 = 1{,}001$! Gdyby

$$\frac{a}{b} = 0,\ldots 143\ldots,$$

to

$$10^m a - n = b\cdot 0{,}143\ldots \in \mathbb{Z}$$

dla pewnych liczb całkowitych m, n. A zatem również

$$7\cdot b\cdot 0{,}143\ldots - b \in \mathbb{Z}.$$

Ale

$$0 < 0{,}001\cdot b \leqslant 7\cdot b\cdot 0{,}143\ldots - b <$$
$$< 0{,}008\cdot b \leqslant 1.$$

Autorzy pozostałych dobrych rozwiązań (nie prostszych od firmowego): **J. Cisło**, **M. Peczarski**, **T. Rawlik**, **M. Adamaszek**, **M. Kieza**.

Zadanie **433.** [$f = P/Q$ – funkcja wymierna; $f(x)^2 - f(x^2) = \text{const} \Rightarrow f = ?$] ($WT$=2,53; LPR=5). Wszystkie poprawne rozwiązania (**J. Cisło**, **B. Dyda**, **P. Kumor**, **M. Peczarski**, **W. Bednarek**) podobne do firmowego, na ogół przedstawione nieco zgrabniej, ale i tak dość długo. Prowadzący *Ligę* przyznaje się szczerze, iż zadanie to zamieścił w nadziei, że może ktoś z uczestników znajdzie rozwiązanie wyraźnie krótsze i bardziej eleganckie…

Zadanie **435.** [Słowa binarne: *trójniak* – słowo postaci AAA, gdzie A – dowolne słowo; czy można, startując od słowa 01 i wstawiając bądź wykreślając trójniaki, uzyskać słowo 10?] (WT=1,66; LPR=11). Sporo dobrych rozwiązań, w większości izomorficznych z firmowym. Jedynie **J. Klisowski** i **P. Kumor** stosują nieco inną metodę: *nieporządkiem* w słowie $W = x_1x_2\ldots x_n$ nazwijmy każdą parę (i,j) taką, że $1\leqslant i<j\leqslant n$, $x_i=1$, $x_j=0$; liczba nieporządków w słowie, brana modulo 3, okazuje się być niezmiennikiem operacji dopuszczalnych w zadaniu – stąd negatywna odpowiedź na postawione pytanie.

Stosując tę metodę, **J. Klisowski** znajduje uogólnienie: rozważa k-niaki, czyli słowa postaci $AA\ldots A$ (k-krotne powtórzenie) i wykazuje, że liczba nieporządków w słowie binarnym, brana modulo k (dla k nieparzystych) oraz modulo $k/2$ (dla k parzystych), jest niezmiennikiem operacji wstawiania bądź wykreślania k-niaków.

Zadanie **436.** [$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ różniczkowalna, $f(2x) = f(x) + xf'(2x) \Rightarrow f = ?$] ($WT$=2,63; LPR=6). Wszystkie dobre rozwiązania takie, jak firmowe. Ich autorzy: **J. Cisło**, **A. Daniluk**, **P. Kumor**, **J. Olszewski**, **M. Peczarski**, **T. Wietecha**.

Zadanie **441.** [$W(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$; $T(x) = x^2+px+q$; $p = 2-a+b$; $q = W(-1)$; T ma pierwiastek nieujemny $\Rightarrow W$ ma pierwiastek rzeczywisty] (WT=2,84; LPR=6). To zadanie, w naiwnym zamierzeniu redaktora *Ligi* „łatwe”, rozwiązali jedynie: **P. Kumor**, **J. Olszewski**, **M. Peczarski**, **T. Wietecha**, **J. Cisło**, **B. Dyda**; rozwiązania identyczne z firmowym lub nieco bardziej okrężne.

Zadanie **442.** [Czy istnieje funkcja $f\colon\langle 1;\infty)\to\langle 1;\infty)$ ciągła, rosnąca i taka, że funkcja $g(x) = f(x)/x$ przyjmuje wszystkie wartości dodatnie?] (WT=2,12; LPR=9). W rozwiązaniu firmowym był przykład funkcji o tych własnościach, przedziałami liniowej – i podobne przykłady podawali w większości uczestnicy ligi. Niektórzy jednak, wiedzeni poczuciem estetyki, znajdowali funkcje wyrażalne pojedynczym wzorem analitycznym:

$$f(x) = x^{1+\frac12\sin\ln\ln x} \quad \text{dla } x>1,\quad f(1)=1 \qquad (\textbf{A. Daniluk});$$
$$f(x) = x^{1+\frac13\ln x\cdot\sin\ln(1+\ln x)} \qquad (\textbf{B. Dyda});$$
$$f(x) = 1+x^2(1+\sin\ln\sqrt{x}) \qquad (\textbf{J. Olszewski});$$

i jeszcze taki smakowity przykładzik (ponownie **A. Daniluk**):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2^n} h(x-2^{2^n}+1),$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{dla } x>0,\\ 0 & \text{dla } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Czytelnikom proponujemy niezbyt trudne sprawdzenie, że wszystkie te funkcje istotnie mają wymagane własności.

Zadanie **443.** [Słowa z alfabetu $\{0,1,2\}$; A_n – zbiór n-słów bez bloku 11 ani 22; B_n – zbiór n-słów bez bloku 012 ani żadnej jego permutacji $\Rightarrow 3|A_n| = |B_{n+1}|$] ($WT$=1,70; LPR=10). **M. Adamaszek**, **J. Cisło**, **J. Olszewski**, **M. Peczarski**, **T. Wietecha** udzielili nam lekcji, jak należy przeprowadzić dowód: niech C_n będzie zbiorem tych słów ze zbioru B_n, które zaczynają się znakiem 0; ponieważ $|B_n| = 3|C_n|$, wystarczy dowieść, że $|A_n| = |C_{n+1}|$; to zaś wynika ze spostrzeżenia, że funkcja $(x_0x_1\ldots x_n)\mapsto(y_1\ldots y_n)$, gdzie $y_i = x_i - x_{i-1}$ (mod 3), odwzorowuje zbiór C_{n+1} bijektywnie na A_n.

Pozostałe rozwiązania, w tym i firmowe, polegały na wyprowadzeniu wzorów rekurencyjnych dla rozważanych liczności – też dobrze, ale mniej pięknie, niż wskazanie bijekcji.

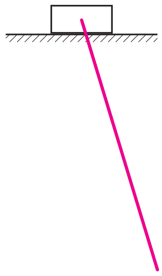
Klub 44

Zadania z fizyki nr 352, 353

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2003

352. Jednorodny pręt może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi osadzonej w klocku spoczywającym na poziomej powierzchni (rys. 1). Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia między klockiem a powierzchnią niezbędna do tego, aby po odchyleniu pręta do poziomu i puszczeniu klocek nie ruszył z miejsca? Masa klocka jest pomijalnie mała w porównaniu z masą pręta.

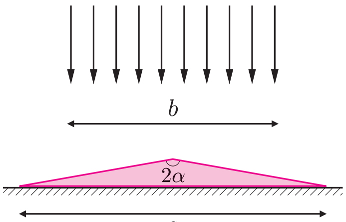


Rys. 1

353. W doświadczeniu opisanym w jednym z zeszłorocznych numerów *Wiedzy i Życia* badano zimne neutrony (tzn. neutrony o bardzo małej energii kinetycznej) odbijające się od poziomej powierzchni i wykryto ich kwantowe poziomy energetyczne w polu grawitacyjnym Ziemi. Według podanej informacji wysokość stopnia między sąsiednimi poziomami wynosiła 15 μm. Zastosować analizę wymiarową w celu potwierdzenia tej wartości (co do rzędu wielkości).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2002

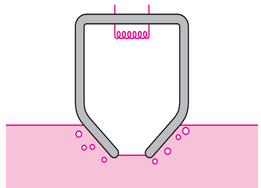
Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

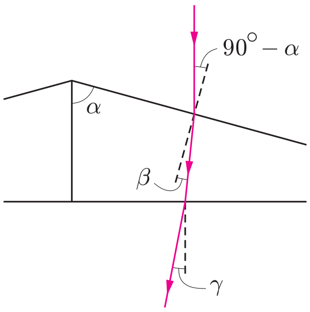
344. Na powierzchni poziomej może poruszać się bez tarcia pryzmat, którego przekrój poprzeczny jest trójkątem równoramiennym o podstawie a i kącie łamiącym $2\alpha = 160°$ (rys. 2). Współczynnik załamania szkła pryzmatu jest równy $n = 1{,}5$. Na pryzmat skierowano pionowo od góry wiązkę światła o szerokości $b = (3/4)a$ i mocy $P = 8000$ W, równo rozłożonej na tej szerokości. Naszkicować wykres siły F działającej na pryzmat w kierunku poziomym, w zależności od przesunięcia x środka pryzmatu względem środka wiązki. Obliczyć maksymalną wartość tej siły. Pominąć odbicie światła od którejkolwiek z rozpatrywanych powierzchni.

345. Naczynie o porowatych ściankach włożono otworem do wody (rys. 3). Gdy włączono spiralę grzejną, z naczynia zaczęły wydobywać się pęcherzyki powietrza, przy czym proces ten miał charakter stacjonarny (nie mijał po ustaleniu się temperatury). Wyjaśnić przyczynę zjawiska.



Rys. 3

344. Kąt padania światła na powierzchnię pryzmatu (rys. 4) jest równy $90° - \alpha$, więc zgodnie z prawem Snella kąt załamania β jest dany wzorem $\sin\beta = \frac{1}{n}\cos\alpha$. Kąt padania na poziomą ściankę wynosi $90° - \alpha - \beta$, a kąt załamania γ znajdziemy po powtórnym zastosowaniu prawa Snella



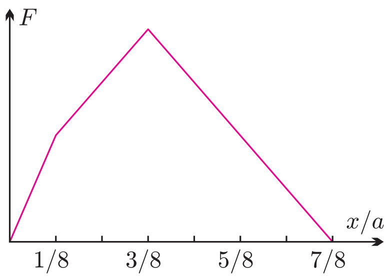
Rys. 4

$$\sin\gamma = n\cos(\alpha + \arcsin\left(\tfrac{1}{n}\cos\alpha\right)) = 0{,}0877.$$

Jeśli energia fotonu jest równa E, to składowa pozioma jego pędu po załamaniu w pryzmacie wynosi $(E\sin\gamma)/c$. Ze wzoru $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{P}/dt$ wnioskujemy, że gdy moc wiązki padającej na jedną ze ścianek pryzmatu wynosi P_1, to wynikająca stąd siła pozioma działająca na pryzmat ma wartość $(P_1\sin\gamma)/c$.

Pozostaje nam teraz tylko kwestia rozkładu mocy wiązki na obie ścianki pryzmatu. Zauważmy, że gdy przesunięcie x pryzmatu jest mniejsze od $\frac{1}{8}a$, to wraz ze wzrostem x liniowo rośnie jedna część tej mocy (oznaczmy ją P_1), a maleje druga (P_2); ponieważ zwroty odpowiednich sił są przeciwne, więc wypadkowa siła rośnie „podwójnie". W przedziale $\frac{1}{8}a < x < \frac{3}{8}a$ siła wypadkowa także rośnie ze wzrostem x, ale wynika to już tylko ze spadku P_2, ponieważ ścianka 1 jest już oświetlona na całej szerokości i wartość $P_1 = \frac{2}{3}P$ pozostaje stała. Dla $x = \frac{3}{8}a$ wartość P_2 spada do zera, a siła osiąga wartość maksymalną równą

$$F = (2P\sin\gamma)/3c = 1{,}56\ \mu\text{N}.$$



Rys. 5

Przy dalszym wzroście x siła zmniejsza się, gdyż coraz mniejsza część wiązki pada na pryzmat. Spadek siły do zera następuje dla $x = \frac{7}{8}a$. Wykres – zob. rys. 5.

345. Załóżmy wstępnie, że naczynie jest zamknięte, i między powietrzem wewnątrz naczynia a powietrzem zewnętrznym występuje równowaga, tzn. liczba cząsteczek przenikająca przez pory na zewnątrz i do wewnątrz jest jednakowa. Prawdopodobieństwo trafienia cząsteczki do małego otworka w ściance naczynia jest proporcjonalne do drogi przebytej przez cząsteczkę, a zatem liczba cząsteczek trafiająca w ciągu sekundy do otworka jest proporcjonalna do iloczynu liczby cząsteczek na jednostkę objętości n i średniej prędkości cząsteczek $v_{\text{śr}}$. Stąd $n_1 v_{1\text{śr}} = n_2 v_{2\text{śr}}$. Prędkość średnia jest proporcjonalna do pierwiastka z temperatury absolutnej T, czyli $n_1\sqrt{T_1} = n_2\sqrt{T_2}$.

Z drugiej strony, ciśnienie jest proporcjonalne do iloczynu nT (por. równanie Clapeyrona). Wynika stąd, że w naczyniu, gdzie temperatura jest wyższa od zewnętrznej, ciśnienie powietrza osiąga także wyższą wartość. Ostatecznie wnioskujemy, że w naczyniu z otworem założony na początku stan równowagi nie utrzyma się i powietrze będzie z niego wypływać w postaci pęcherzyków.

Rozszerzona czołówka
ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
340 ($WT = 1{,}25$) i **341** ($WT = 2{,}00$)
z numeru 6/2002

Aleksander Surma	Myszków	3 - 42,81
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	1 - 42,62
Marek Wójcicki	Szczecin	2 - 37,65
Tomasz Rudny	Warszawa	29,50
Andrzej Idzik	Bolesławiec	4 - 28,89
Grzegorz Miłoś	Mielec	24,40
Tomasz Wietecha	Tarnów	4 - 17,25
Marian Łupieżowiec	Gliwice	16,71
Jacek Konieczny	Poznań	12,31
Leszek Grzanka	Chechło	10,98
Michał Jóźwikowski	Błonie	9,32
Przemysław Gadziński	Środa Śląska	1 - 8,61
Marcin Misiak	Poznań	8,16
Kazimierz Gryszko	Gliwice	7,93
Piotr Kumor	Olsztyn	7,64
Jacek Piotrowski	Rzeszów	1 - 7,59

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2000-2002 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani **Klubu 44 F**
(w kolejności uzyskiwania
statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma, P. Gworys, A. Idzik (4), T. Wietecha (4), J. Łazuka

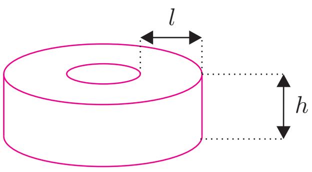
(jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Uczestnicy ubiegłorocznego – piątego już – Turnieju Zadań z Fizyki (organizowanego w ramach warszawskiego Festiwalu Nauki) reprezentowali wyjątkowo szeroki przekrój wieku i wykształcenia, gdyż obok gimnazjalistów na sali znaleźli się absolwenci wyższych uczelni. Pierwsze dwie nagrody – kalkulatory programowalne – wygrali **Piotr Sobolewski** i **Paweł Huryn**. Dalsze miejsca były premiowane nagrodami książkowymi ufundowanymi przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe, a wszyscy uczestnicy dostali ponadto kilka numerów *Delty*. Niektóre zadania turniejowe zamieścimy w *Delcie* 9/2003 poświęconej VI Festiwalowi Nauki (z 2002 r.).

A oto najciekawsze rozwiązania zadań z ostatniego rocznika, przysłane przez naszych Czytelników:

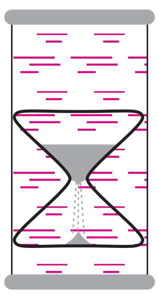
Zadanie **325.** [Tor plamki na ekranie, gdy obracamy oscyloskop w polu magnetycznym Ziemi] (współczynnik trudności $WT = 2{,}62$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). W rozwiązaniu „firmowym” stwierdzono, że przy danych wartościach liczbowych zmiana kierunku siły działającej na wiązkę elektronów jest niewielka i można zastosować wzór na przesunięcie w ruchu jednostajnie zmiennym. Dwóch Klubowiczów (**T. Wietecha** i **M. Wójcicki**) ujęło się ambicją i spróbowało przeanalizować ruch elektronów ściśle. Obliczenia okazały się tak skomplikowane, że trudno je było doprowadzić do końca, a wykrycie źródła błędu w jednym z wyników przekroczyło siły redaktora tej rubryki. Wyciągnijmy z tego morał: o ile tylko jest to dopuszczalne, trzeba stosować uproszczenia, a ewentualnie w następnej kolejności dopiero badać potrzebę i możliwość odejścia od nich. Trzecie poprawne rozwiązanie (ale także z drobnym błędem) – **J. Piotrowski**.

Zadanie **331.** [Jaka budowa rdzenia autotransformatora zapewni najlepsze wytłumienie prądów wirowych?] ($WT = 2{,}80$, $LPR = 2$). Zamiast wziąć pod uwagę dwie składowe prądu – silniejszą wokół przekroju rdzenia i słabszą wzdłuż rdzenia (jak w rozwiązaniu „firmowym”) **T. Wietecha** zbadał problem ciekawy, lecz nieco inny – jak zależy wartość mocy cieplnej wydzielonej w prostokątnym przekroju rdzenia od jego wymiarów. Według otrzymanego wyniku dla $l > h$ (na rysunku 1 przypominamy sens tych parametrów) korzystniej jest zwinąć rdzeń z długiej taśmy o szerokości h, natomiast dla $l < h$ lepiej jest zestawić rdzeń z płaskich kółek z dziurką ułożonych w stos. Z kolei **M. Wójcicki** przyjrzał się spiralnemu przekrojowi rdzenia zwiniętego z długiej taśmy i doszedł do wniosku, że niezerowa wartość kąta między liniami pola magnetycznego (które są okręgami) a spiralą powoduje efektywne pogrubienie taśmy i ułatwia w ten sposób powstawanie prądów wirowych. Rzeczywiste znaczenie tego efektu wydaje się jednak wątpliwe.



Rys. 1

Zadanie **333.** [Dlaczego klepsydra z piaskiem, pływająca w cylindrze z cieczą (rys. 2), po obróceniu cylindra zatrzymuje się na pewien czas przy jego dnie?] ($WT = 3{,}20$, $LPR = 0$). Obok podanego wyjaśnienia (klepsydra „chciałaby” się obrócić, dlatego przytrzymuje ją tarcie) możliwe do zaakceptowania byłyby i inne argumenty, o ile zostałyby przedstawione przekonująco i logicznie. Trudno jednak przyjąć tezę jednego z Czytelników, że przyczyną jest sprężystość szkła i jego odkształcenie spowodowane spadającym piaskiem! Błędne jest też – jak sądzę – zawarte w dwóch innych listach twierdzenie, że przyczyną jest coraz niższa wysokość spadku piasku i malejąca w związku z tym siła nacisku. Spójrzmy bowiem na ruch środka masy: przesuwa się on w dół, a rosnąca wysokość dolnej górki oznacza, że tempo jego opadania maleje, czyli przyspieszenie środka masy jest skierowane w górę; w rezultacie klepsydra powinna raczej być dodatkowo dociskana do dna.


Rys. 2

Zadanie **335.** [Częstość drgań powietrza w butelce] ($WT = 1{,}83$, $LPR = 3$). Jak stwierdził **A. Idzik**, analizę tego problemu można znaleźć w podręczniku Crawforda *Fale*. Pozostałe dobre rozwiązania – **T. Wietecha** i **M. Jóźwikowski**.

Zadania **336.** [Równowaga sześcianu spoczywającego na dwóch prętach] ($WT = 1{,}15$, $LPR = 2$) i **337.** [Prędkość spadania przewodzącego pierścienia w zmiennym polu magnetycznym] ($WT = 1{,}00$, $LPR = 2$). Zadania w tej serii nie były szczególnie łatwe, ale ponieważ dobre rozwiązania przysłali akurat tylko dwaj „najtęższi” zawodnicy (**A. Idzik** i **T. Wietecha**), więc współczynniki WT okazały się niskie, a zysk punktowy – niewielki. Cóż robić, taki jest regulamin!

Pozostali członkowie **Klubu 44 F**
(alfabetycznie)
„dwukrotni”:

J. Lipkowski, P. Perkowski, M. Wójcicki;

„jednokrotni”:

A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, A. Nowogrodzki, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.