02/03 (62)

Γlimatias $\underset{n\to\infty}{}$

O RÓWNYCH SUMACH WSZYSTKICH POTĘG

Dziś ostatni artukuł o równych sumach potęg. Ponieważ nie chcę, aby któremukolwiek wykładnikowi było smutno, że o nim nigdy nie wspomniałem, napiszę od razu o wszystkich.

Zachodzi takie oto

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje nietrywialne rozwiązanie równania $(n, n+1, n+1)$, tzn. takie liczby całkowite dodatnie $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n+1}$ oraz $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{n+1}$, że

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n+1}^n = b_1^n + b_2^n + \ldots + b_{n+1}^n,$$

a przy tym układy $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$ nie są identyczne.

Dowód: Niech N będzie dużą liczbą całkowitą, którą sprecyzujemy w dalszej części dowodu. Rozważmy zbiór wszystkich układów liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, gdzie $N \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n+1}$. Liczba takich układów jest nie mniejsza niż $L = \frac{N^{n+1}}{(n+1)!}$, gdyż wszystkich układów (niekoniecznie nierosnących) jest N^{n+1}, a jeden układ nierosnący odpowiada co najwyżej $(n+1)!$ permutacjom swoich elementów – może być ich mniej, gdy są wśród nich powtórzenia. Tak naprawdę, dokładna liczba nierosnących układów jest **równa** $\binom{N+n}{n+1}$, ale wygodniej jest nam posłużyć się podanym wyżej oszacowaniem.

Każdemu układowi przypiszmy sumę n-tych potęg jego elementów. Taka suma jest liczbą całkowitą dodatnią nie przekraczającą $S = (n+1) \cdot N^n$. Jeśli teraz $L > S$, czyli jeśli rozważanych układów jest więcej niż możliwych sum, które można im przypisać, to na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwa układy, którym przypisano tę samą sumę. Mamy wówczas

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n+1}^n = b_1^n + b_2^n + \ldots + b_{n+1}^n,$$

przy czym układy liczb po obu stronach równania są różne, ale mogą mieć wspólne elementy.

Do zakończenia dowodu pozostaje wskazać takie N, aby $L > S$, czyli $\dfrac{N^{n+1}}{(n+1)!} > (n+1) \cdot N^n$, co zachodzi przy $N > (n+1) \cdot (n+1)!$.

Co daje powyższe twierdzenie?

Dla $n = 2$ jego teza na pewno nie zwala z nóg. Oto bowiem dowiadujemy się, że istnieją równe sumy trzech kwadratów liczb całkowitych dodatnich.

Każdy, kto umie rachować w pamięci do trzydziestu, od razu zauważy, że $27 = 5^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2$.

Umiejętność liczenia do pięćdziesięciu może zaowocować takim oto przykładem

$$\begin{aligned}&12345678901234567890^2 + 7^2 + 1^2 =\\ &\qquad = 12345678901234567890^2 + 5^2 + 5^2.\end{aligned}$$

Jednak dla $n = 24$ dostajemy już coś interesującego. Otóż zgodnie z twierdzeniem istnieje nietrywialne rozwiązanie równania

$$a_1^{24} + a_2^{24} + \ldots + a_{25}^{24} = b_1^{24} + b_2^{24} + \ldots + b_{25}^{24}$$

w liczbach nie przekraczających

$$25 \cdot 25! + 1 = 387780251083274649600000001.$$

Do dziś nie jest jednak znany przykład takiego rozwiązania. Twierdzenie mówi, że rozwiązanie istnieje, ale nie daje żadnej wskazówki, jak takie rozwiązanie skonstruować.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (35)

Zanim Kolumb odkrył Amerykę, sądzono, że Ziemia jest płaska. Pogląd taki nie był pozbawiony racji, jako że płaska jest nie tylko Ziemia, ale nawet cała przestrzeń. Zachodzi bowiem następujące

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, dowolnych n różnych punktów przestrzeni leży w jednej płaszczyźnie.

Dowód: Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n.

Tradycyjnie, sprawdzenie prawdziwości twierdzenia dla $n = 1$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Przeprowadzimy krok indukcyjny. Załóżmy, że n jest taką liczbą, dla której teza twierdzenia jest prawdziwa. Wykażemy prawdziwość twierdzenia dla $n+1$.

Niech dane będą dowolne punkty przestrzeni $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym, dowolnych n punktów przestrzeni leży w jednej płaszczyźnie, w szczególności w jednej płaszczyźnie leżą punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$. Innymi słowy, punkt A_n leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Podobnie punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}$ leżą w jednej płaszczyźnie, czyli punkt A_{n+1} także leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Zatem wszystkie punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ leżą w jednej płaszczyźnie, a mianowicie w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$.

Pewnie widzisz już, Drogi Czytelniku, gdzie dowód się „sypie". Punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ wcale nie muszą wyznaczać płaszczyzny, bo mogą być współliniowe.

Ale to tylko pozorna trudność. Można przecież tak ponumerować dane punkty, aby punkty o numerach od 1 do $n-1$ nie leżały na jednej prostej. Takie ponumerowanie nie jest możliwe tylko wtedy, gdy **dowolne** $n-1$ spośród danych $n+1$ punktów są współliniowe. Ale wówczas (przy dowolnej numeracji) punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}$ byłyby współliniowe, czyli punkt A_{n-1} leżałby na prostej wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-2}$. Podobnie, na mocy współliniowości punktów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-2}, A_n$ na tejże prostej leżałby punkt A_n, a dzięki współliniowości punktów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-2}, A_{n+1}$ także punkt A_{n+1} musiałby leżeć na tej samej prostej. Tak więc w takim przypadku wszystkie dane punkty byłyby nie tylko współpłaszczyznowe, ale nawet współliniowe.

Tym samym dowód indukcyjny jest zakończony, a płaskość Ziemi, wraz z całą przestrzenią, dowiedziona.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl