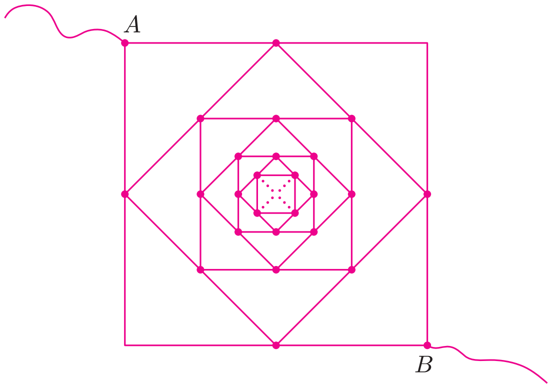
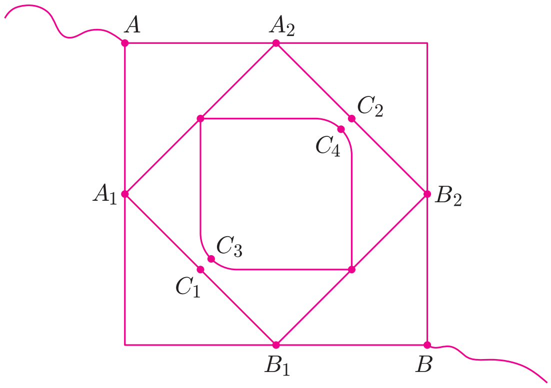
Elektryczne układy samopodobne

W *Delcie* 7/2002 pojawiło się zadanie z fizyki, które spotkało się z odzewem Czytelników. Przypomnijmy jego treść:

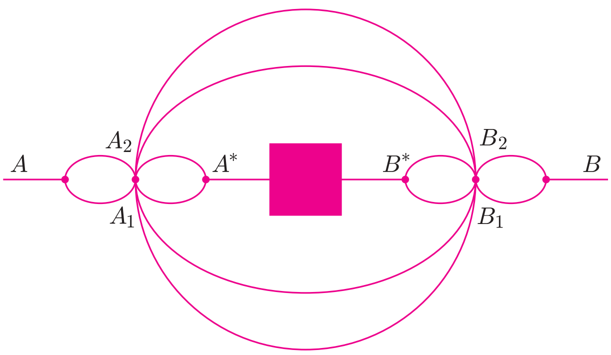
Znaleźć opór między punktami A i B figury przedstawionej na poniższym rysunku. Liczba kwadratów w środku jest bardzo duża.



Rozwiązanie opierało się na obserwacji, zwanej zasadą podobieństwa, że opór zastępczy $R = R_{AB}$ jest liniową funkcją oporu boku r, czyli $R = \alpha r$, przy czym α jest jakąś bezwymiarową wielkością zależną tylko od geometrii obwodu. Schemat ten można uprościć następująco.



Rozdzielając punkty C_1 i C_3 oraz C_2 i C_4, w których potencjały są jednakowe i łącząc na chwilę punkty A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2, otrzymamy schemat jak na rysunku poniżej.



Widzimy, że między punktami A^* i B^* jest taki sam kwadrat jak wyjściowy, tylko dwa razy mniejszych rozmiarów. A opór tego kwadratu jest też dwa razy mniejszy (bo proporcjonalny do długości boku) – korzystamy ze wspomnianej zasady podobieństwa. Rozwiązanie problemu jest już proste:

$$R = \frac{r}{2} + \frac{1}{\frac{1}{r/2} + \frac{1}{r/(2\sqrt{2})} + \frac{1}{R/2 + r/(2\sqrt{2})}}.$$

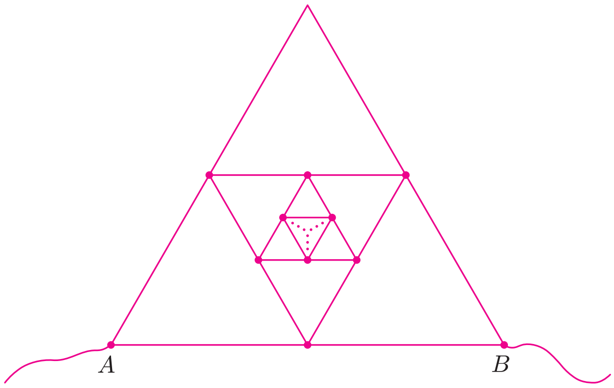
Równanie to upraszcza się do

$$\alpha^2 + (\sqrt{2} - 1)\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

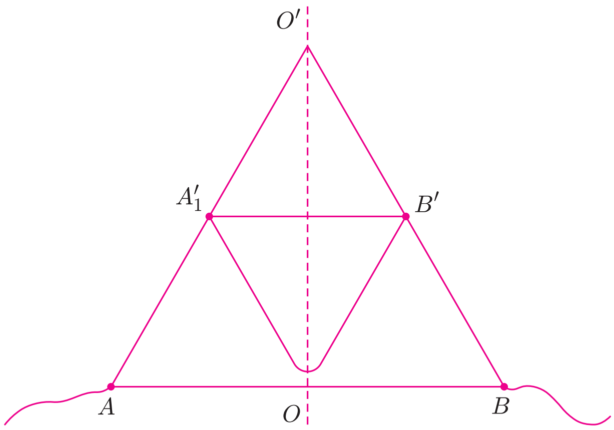
gdzie $\alpha = R/r$. Stąd

$$R_{AB} = R = \frac{r}{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Rozwiążmy podobny problem, tym razem obliczając opór między wierzchołkami trójkąta równobocznego, w który jest wbudowany ciąg trójkątów równobocznych wbudowanych jeden w drugi. Liczba trójkątów jest bardzo duża.



Punkty leżące na osi symetrii trójkąta OO' możemy rozdzielić, otrzymując układ pokazany poniżej.



Opór podukładu $A'B'$ wynosi z zasady podobieństwa

$$R_{A'B'} = \alpha r/2.$$

Przyjmując $R_{AB} = \alpha r$, otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{\alpha r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r + (\frac{1}{r} + \frac{2}{\alpha r})^{-1}}.$$

Rozwiązanie tego równania jest więc następujące

$$\alpha = (\sqrt{7} - 1)/3,$$

zatem

$$R_{AB} = \frac{\sqrt{7} - 1}{3} r.$$

E. Cz.