O stałej gry w sapera

Jerzy TYSZKIEWICZ

W matematyce „prawie każdy” oznacza zwyczajowo „każdy z wyjątkiem, być może, skończonej liczby”.

Prawie każdy z Czytelników grał w sapera – prostą grę komputerową dołączaną do systemu Windows (istnieje także wersja działająca pod Linuksem).

W wersji „dla początkujących” na tablicy 8×8 umieszczonych jest losowo 10 min, w miejscach nieznanych graczowi. Gracz ma je zlokalizować, przy czym, po kliknięciu na pole z miną „wylatuje w powietrze”, czyli przegrywa, a po kliknięciu na pole wolne od miny otrzymuje od komputera informację o łącznej liczbie min znajdujących się na polach sąsiednich i gra dalej.

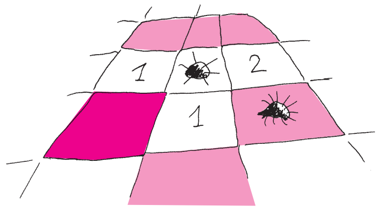
Nawet najlepszy i najbardziej doświadczony gracz, rozpoczynając grę, nie ma pewności, że zakończy ją odkryciem wszystkich min. Pierwsze kliknięcie wykonuje na ślepo, bez żadnej informacji, po czym z prawdopodobieństwem 10/64 wylatuje w powietrze. Są też inne sytuacje, w których myślenie nie pomaga, jak np. ta poniżej.

1	1	1	1	1	1	1	1
		1			1		

W ten sposób chociaż lepszy gracz ma większe prawdopodobieństwo wygranej, to jednak dla żadnego gracza prawdopodobieństwo to nie przekracza 54/64, a tak naprawdę, na skutek istnienia nierozwiązywalnych konfiguracji, takich jak wskazana powyżej, jest ono nawet ostro mniejsze od tej liczby.

Dla uniknięcia matematycznego rozpatrywania pojęcia intuicji czy, jak kto woli, szóstego zmysłu graczy, formalnie należałoby mówić o prawdopodobieństwie sukcesu *strategii*, która podaje sposób zagrania w każdej możliwej zastanej konfiguracji na planszy, przy czym dopuszczamy możliwość ruchu losowego, ze z góry przez strategię ustalonymi prawdopodobieństwami poszczególnych posunięć.

Oczywiście, istnieje kres górny wszystkich prawdopodobieństw sukcesu. Jest to pewna liczba z przedziału $(0, 54/64]$. Można tę liczbę nazwać *stałą gry w sapera*.



Wyznaczenie tej stałej w sposób analityczny wydaje się całkowicie niemożliwe: wszystkich układów min jest $\binom{64}{10}$, a możliwych strategii nieskończenie wiele.

Podejściem praktycznie wykonalnym jest badanie empiryczne: z jaką częstością udaje się nam wygrać przy grze z maksymalnie wytężoną uwagą. Oczekujemy na pomysły i wyniki Czytelników. Bardzo interesujące wydaje nam się pytanie, czy stała gry w sapera dla początkujących jest większa od stałej gry w sapera dla średnio zaawansowanych (pole 16×16 i 40 min, czyli taka sama gęstość, jak dla początkujących).

Rozwiązanie zadania F 588.

Koraliki będą się wznosić pod warunkiem, że odpowiednie składowe sił odpychania kulombowskiego będą większe od sił ciężkości:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} > mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Jeśli koraliki zatrzymają się, nie osiągnąwszy końców prętów, to z zasady zachowania energii

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L + 2h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\right) = 2mgh$$

dostajemy maksymalną wysokość h

$$h = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 mgL} - \frac{L}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Wynik ten jest poprawny dla $h \leqslant \sin\alpha$, tzn. przy

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \leqslant mgL\,\mathrm{tg}\,\alpha(L + 2l\cos\alpha).$$

W przypadku przeciwnym koraliki wylecą z prętów. Z zasady zachowania energii mamy prędkość koralika na końcu pręta

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L + 2h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\right) - 2mgl\sin\alpha.$$

Tylko składowa pionowa tej prędkości odpowiada za wysokość, na jaką wzniesie się koralik

$$h = l\sin\alpha + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Zatem poprawnym wynikiem przy

$$q^2 > 4\pi\varepsilon_0 mgl\,\mathrm{tg}\,\alpha(L + 2l\cos\alpha)$$

jest

$$h = l\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{q^2 l\cos\alpha\sin^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 mgL(L + 2l\cos\alpha)}.$$