Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2003

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 453, 454

Redaguje Marcin E. KUCZMA

453. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2+3y=u^2 \\ y^2+3x=v^2 \end{cases}$$

w dodatnich liczbach całkowitych x, y, u, v.

454. Znaleźć taką stałą C, by dla każdej liczby naturalnej n oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $a_1,\ldots,a_n>0$ zachodziła nierówność

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+\ldots+a_n}\leqslant C\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

(im mniejsza stała C, tym wyższa ocena za rozwiązanie).

Zadanie **454** (z podaną przykładową wartością stałej C) zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
441 ($WT=2{,}84$) i **442** ($WT=2{,}12$)
z numeru 5/2002

Bartłomiej Dyda	– Wrocław	42,04
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	42,00
Piotr Kumor	– Olsztyn	41,74
Marcin Peczarski	– Latchorzew	38,65

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2002

Przypominamy treść zadań:

445. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla $x,y\in\mathbb{R}$ równanie

$$f(f(x-y))=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy.$$

446. Liczby całkowite a, b są związane równością

$$2a^2+a=3b^2+b.$$

Dowieść, że różnica $a-b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

445. Niech f będzie funkcją spełniającą to równanie. Oznaczmy zbiór jej wszystkich wartości przez W oraz przyjmijmy $f(0)=c$. Dla $y=0$ równanie przybiera postać

$$f(f(x))=f(x)-c+cf(x),$$

co można zapisać jako

(1) $\qquad f(w)=(c+1)w-c \quad$ dla $\quad w\in W.$

W szczególności $f(c)=c^2$. Podstawiając w zadanym równaniu $x=y$ otrzymujemy stąd

(2) $\qquad f(x)^2=x^2+c^2 \quad$ dla $\quad x\in\mathbb{R}.$

Podnosimy (1) do kwadratu i uwzględniając wzór (2) dostajemy po redukcji

(3) $\qquad (c^2+2c)w^2=(2c^2+2c)w \quad$ dla $\quad w\in W.$

Przypuśćmy, że $c\neq 0$; wówczas z równości (1) wynika, że $0\notin W$. Dzielimy równanie (3) przez cw, otrzymując w wyniku $(c+2)w=2c+2$ dla wszystkich $w\in W$. To znaczy, że zbiór W jest jednoelementowy, czyli f jest funkcją stałą. Ale żadna funkcja stała nie spełnia wyjściowego równania.

W takim razie $c=0$. Wykażemy, że $W=\mathbb{R}$. Weźmy dowolną liczbę $y\in\mathbb{R}$. W wyjściowym równaniu podstawiamy $x=0$, otrzymując $f(f(-y))=-f(y)$. Z równania (2) mamy zaś $f(y)^2=y^2$; wobec tego

$$y=f(y) \quad \text{lub} \quad y=-f(y)=f(f(-y)).$$

W każdym przypadku $y\in W$.

Zatem istotnie $W=\mathbb{R}$. Wzór (1) daje ostateczną odpowiedź: $f(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$. Jest to jedyna funkcja spełniająca rozważane równanie.

446. Przekształcamy daną równość:

(4) $\qquad b^2=2a^2-2b^2+a-b=(a-b)(2a+2b+1).$

Każdy dzielnik pierwszy różnicy $a-b$ jest, jak widać, dzielnikiem liczby b, zatem także i liczby a; nie jest więc dzielnikiem liczby $2a+2b+1$. To znaczy, że w rozkładzie liczby $a-b$ występuje w takiej samej potędze, jak w rozkładzie liczby b^2, czyli w potędze parzystej. Stąd wniosek, że liczba $a-b$ jest albo kwadratem liczby całkowitej (teza zadania!) albo „minus kwadratem” – a w takim przypadku czynnik $2a+2b+1$ jest, wobec (4), także „minus kwadratem”:

(5) $\qquad a-b=-c^2, \qquad 2a+2b+1=-d^2.$

Pozostaje wyeliminować ten przypadek. Przypuśćmy wobec tego, że zachodzą związki (5). W drugim z nich mamy po lewej stronie liczbę nieparzystą; zatem $d^2\equiv 1 \pmod 8$, skąd $2a+2b\equiv -2 \pmod 8$, czyli $a+b\equiv -1 \pmod 4$. Zatem liczby a i b są różnej parzystości; z pierwszego równania (5) wnosimy, że $a-b\equiv -1 \pmod 4$. Dodajemy uzyskane związki: $2a\equiv -2 \pmod 4$. To pokazuje, że a jest liczbą nieparzystą; b jest więc liczbą parzystą i mamy sprzeczność z równaniem danym w treści zadania. Sprzeczność kończy dowód.

Zadania z fizyki nr 350, 351

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2003

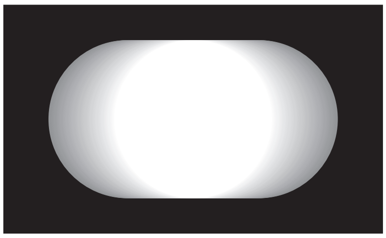
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
336 ($WT = 1{,}15$), **337** ($WT = 1{,}00$),
338 ($WT = 2{,}75$) i **339** ($WT = 2{,}70$)
z numerów 4/2002 i 5/2002

Aleksander Surma	– Myszków	42,81
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	25,76
Tomasz Wietecha	– Tarnów	14,00

350. Na gładkiej poziomej powierzchni stoi miotacz o masie M, początkowo nieruchomy. Jeśli praca mięśni miotacza w czasie rzutu jest ustalona, to pod jakim kątem α do poziomu miotacz powinien wyrzucić kulę o masie m, żeby zasięg rzutu był maksymalny? Pominąć rozmiary miotacza i opór powietrza.

351. Światło słoneczne przechodzi prostopadle przez szczelinę o wymiarach 3×60 mm i tworzy „zajączka” (rys. 1) na ekranie w zaciemnionym pomieszczeniu. Podać przybliżoną wartość odległości ekranu od szczeliny. Pozostałe niezbędne dane wziąć z tablic.

Uwaga: wielkość rysunku nie odpowiada rzeczywistości, więc nie należy się kierować jego ogólnym rozmiarem.



Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2002

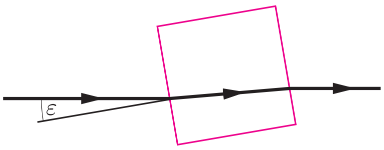
Przypominamy treść zadań:

342. Czy można tak ustawić dwie radiowe anteny nadawcze i dobrać przesunięcie fazy między sygnałami emitowanymi przez nie, aby natężenie promieniowania wynosiło 0 w kierunkach północnym i wschodnim (i tylko w tych dwóch kierunkach), a było maksymalne w kierunkach południowym i zachodnim? Każda z anten osobno wysyła falę harmoniczną o danej długości λ jednakowo we wszystkich kierunkach poziomych (np. anteny są pionowymi masztami), a natężenie ich promieniowania jest jednakowe.

343. a) Na sześcian o boku $a = 5$ cm wykonany ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}5$ pada pod niewielkim kątem ε promień światła (rys. 2). Podać wzór na wartość przesunięcia równoległego tego promienia.

b) W jednej z metod szybkiego filmowania zamiast migawki stosowany jest obracający się sześcian, umieszczony między obiektywem a taśmą filmową. Taśma porusza się wtedy ruchem jednostajnym, a jednostajny obrót sześcianu powoduje, że każdy kolejny obraz jest względem niej nieruchomy. Jeśli sześcian opisany w punkcie a) wykonuje $f = 200$ obrotów na sekundę, to z jaką prędkością powinna przesuwać się taśma?

c) Jakie zalety może mieć zastosowanie takiego urządzenia zamiast tradycyjnego mechanizmu chwytakowego, w którym film porusza się ruchem skokowym?



Rys. 2

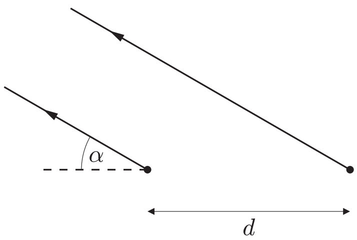
342. Składając dwa drgania harmoniczne o jednakowej amplitudzie A z przesunięciem fazy φ

$$A\sin(\omega t) + A\ \sin(\omega t + \varphi) = 2A\cos(\varphi/2)\sin(\omega t + \varphi/2),$$

otrzymujemy – jak widać – drganie o amplitudzie równej $2A|\cos(\varphi/2)|$. W naszym zadaniu występują dwa źródła przesunięcia fazy – jedno wynika z przesunięcia przestrzennego, czyli

$$\varphi_1 = 2\pi d\cos\alpha/\lambda$$

(gdzie d jest odległością między antenami, a α – kątem kierunkowym, zob. rys. 3), natomiast szukane dodatkowe przesunięcie fazy oznaczmy jako φ_2.



Rys. 3

Zerowa wartość natężenia fali wypadkowej występuje w kierunkach określonych warunkiem

$$\varphi = 2\pi d\cos\alpha/\lambda + \varphi_2 = \pi, 3\pi, 5\pi\ldots$$

a maksymalna wartość – w kierunkach określonych warunkiem

$$\varphi = 2\pi d\cos\alpha/\lambda + \varphi_2 = 0, 2\pi, 4\pi\ldots$$

Ponieważ warunki te są „nieczułe” na odbicie $\alpha \longrightarrow -\alpha$, więc widać, że anteny należy przesunąć względem siebie wzdłuż osi północny wschód–południowy zachód i w pierwszym wzorze podstawić $\alpha = 45°$, a w drugim – $\alpha = 135°$. Warunki zadania będą spełnione, jeśli

$$\varphi_2 = \pi/2, \qquad d/\lambda = \sqrt{2}/4.$$

343. a) Dla małych ε kąt załamania jest równy w przybliżeniu ε/n, a kąt odchylenia promienia od kierunku początkowego – $\varepsilon(1 - 1/n)$. Stąd na drodze a przesunięcie promienia wyniesie $a\varepsilon(1 - 1/n)$.

b) Ponieważ prędkość kątowa sześcianu wynosi $2\pi f$, więc „szybkość przesuwania się promienia” (szybkość taśmy) jest równa

$$2\pi a\ f(1 - 1/n) = 20{,}9 \text{ m/s}.$$

c) Jednostajny ruch taśmy przebiega bez szarpania, a więc może być znacznie szybszy od ruchu skokowego. To samo dotyczy ruchu obrotowego sześcianu, jeśli porównamy go z tradycyjną migawką.