01/03 (61)

Γlimatias $_{n\to\infty}$

O RÓŻNYCH SUMACH POTĘG

Dziś kolej na **różne** sumy **trzynastych potęg**. Różne sumy, czyli przypadki, kiedy sumy równe być nie mogą.

Oto zadanie z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu z roku 2001.

Zadanie. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania
$$a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}=z^{13}$$
w liczbach całkowitych nieujemnych
$$a,b,c,\ldots\ldots,y,z\leqslant 100.$$
Uwaga. W równaniu występuje 26 niewiadomych.

Rozwiązanie: Odnotujmy najpierw, że równanie ma trywialne rozwiązania, w których jedna z liczb $a,b,c,\ldots,y$ jest równa z, a pozostałe są zerami. Dla innych rozwiązań zachodzi nierówność
$$z=\frac{z^{13}}{z^{12}}=\frac{a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}}{z^{12}}<$$
$$<a+b+c+\ldots+y.$$
Ponadto z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13|A^{13}-A$, czyli $2730|A^{13}-A$ dla dowolnej liczby całkowitej A. Stąd
$$a+b+c+\ldots+y\equiv a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}=$$
$$=z^{13}\equiv z(\text{mod } 2730),$$
co daje
$$a+b+c+\ldots+y\geqslant z+2730>2730$$
wbrew założeniu, że $a+b+c+\ldots+y\leqslant 2500$.

Jak widzimy z powyższego rozwiązania, otrzymaliśmy twierdzenie mówiące, że trzynasta potęga liczby nie większej od 100 nie daje się w nietrywialny sposób rozłożyć na sumę co najwyżej 25 (można to łatwo zwiększyć do 28) trzynastych potęg.

Nie sposób nie przymierzyć jako wykładnika przecudnej liczby 37 (o trzydziestu siedmiu jej własnościach można było przeczytać w Gammalimatiasie na przełomie tysiącleci).

Otóż z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot19\cdot37|A^{37}-A$, czyli $1919190|A^{37}-A$ dla dowolnej liczby całkowitej A. To dowodzi na przykład, że 37-mej potęgi liczby mniejszej od 1000 nie można rozłożyć na sumę mniej niż 1920 37-mych potęg.

Skoro niniejszy Gammalimatias ma numer 61, wypada napomknąć też o sumach 61-szych potęg.

Z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot31\cdot61|A^{61}-A$, czyli $56786730|A^{61}-A$ dla dowolnej liczby całkowitej A.

Tak więc 61-sza potęga liczby mniejszej od 1000 nie daje się nietrywialnie przedstawić jako suma mniej niż 56787 61-szych potęg.

Z kolei podzielność $1703601900|A^{62}-A^2$ pokazuje, że 62-ga potęga liczby mniejszej niż 1000 nie rozkłada się na sumę mniej niż 1704 62-gich potęg.

Innym tego typu wykładnikiem jest 73, gdzie mamy $140100870|A^{73}-A$.

Ciekawy jest też przypadek 16-tych potęg. Otóż 16-ta potęga liczby parzystej jest podzielna przez 64 (tak nudne to spostrzeżenie, że pewnie ziewasz, Drogi Czytelniku). Natomiast 16-ta potęga liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 64 daje resztę 1. Wniosek stąd, że w jakiejkolwiek równości sum 16-tych potęg, liczby nieparzystych składników po obu stronach dają przy dzieleniu przez 64 tę samą resztę.

Przypuśćmy, że szukamy rozkładu 16-tej potęgi na sumę co najwyżej 63 16-tych potęg. Wobec tego możliwe są dwa przypadki:

a) **16-ta potęga, którą chcemy rozłożyć, jest parzysta.** Wówczas w szukanej sumie wszystkie składniki są parzyste, można więc wszystkie liczby podzielić przez 2, sprowadzając problem do następnego przypadku.

b) **16-ta potęga, którą chcemy rozłożyć, jest nieparzysta.** Wtedy w szukanej sumie 16-tych potęg dokładnie jeden składnik jest nieparzysty. Mamy więc
$$A^{16}=B^{16}+\ldots,$$
gdzie A i B są nieparzyste, a kropki oznaczają sumę 16-tych potęg liczb parzystych. Mamy wówczas
$$2^{16}|A^{16}-B^{16},$$
czyli
$$2^{16}\,\big|\left(A^8+B^8\right)\left(A^4+B^4\right)\left(A^2+B^2\right)(A+B)\,(A-B)$$
Każda z liczb A^8+B^8, A^4+B^4 i A^2+B^2 jest parzysta, ale nie jest podzielna przez 4. Mamy więc
$$2^{13}|(A+B)(A-B),$$
przy czym jedna z liczb $A+B$ i $A-B$ jest parzysta niepodzielna przez 4, a druga jest podzielna przez 2^{12}. Stąd już nietrudno otrzymać nierówność $A>2^{11}=2048$.

W istocie udało mi się rozłożyć liczbę 2091^{16} na sumę 51 16-tych potęg liczb całkowitych dodatnich.

Identyczne rozumowanie pokazuje, że liczba, której 32-ga potęga rozkłada się na sumę nie więcej niż 127 32-gich potęg, musi być większa niż $2^{32-6}=2^{26}=$ $=67108864$.

Podobnie liczba, której 64-ta potęga rozkłada się na sumę nie więcej niż 255 64-tych potęg, musi być większa niż $2^{64-7}=2^{57}$, a to już jest liczba 18-cyfrowa.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl