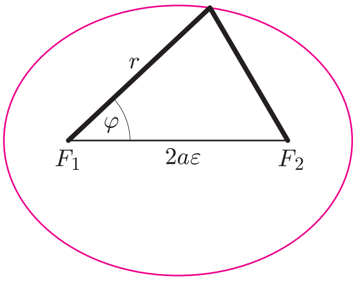
Wszystko ze sznurka

Wielu uczniów i studentów niepokoi się, gdy jakieś pojęcie ma wiele definicji. Powstaje wtedy problem, która z tych definicji jest najważniejsza. Pytanie to – aczkolwiek bez sensu – jest psychologicznie zrozumiałe: była sobie kiedyś jedna definicja, a z niej powstały następne. Niekiedy przywilej bycia najważniejszą definicją przyznawany jest definicji najprostszej (co daje często nowy problem: co jest najprostsze?).

Ale nie dyskutujmy problemu ogólnego. Zatrzymajmy się na elipsie, która faktycznie ma wiele poręcznych definicji. Mnie najlepsza wydaje się definicja stereometryczna, mówiąca, iż elipsa to wynik *spotkania stożka z płaszczyzną tworzącą z jego osią kąt większy niż tworzące*, żeby zacytować XVII-wieczne dzieło Desarguesa.

Jednak wielu moich kolegów ma płaski umysł i koniecznie chce sprawy krzywych płaskich traktować planimetrycznie, jakby przestrzeń nie istniała. Tu też mam swój typ i spróbuję przekonać Czytelników, że jest to typ trafny. Spełnia on bowiem wszystkie przytoczone wyżej (i jeszcze inne) kryteria doskonałości. Uzyskuje się z niego inne definicje bardzo elementarnie.

Tą definicją jest opis konstrukcji za pomocą sznurka i dwóch gwoździków, do których przywiązane są jego końce: rysujemy na płaszczyźnie te punkty, które uzyskamy naciągając sznurek. Czyli jest to zbiór punktów, których suma odległości od dwóch danych punktów F_1 i F_2 (zwanych ogniskami) jest stała; oznaczmy ją $2a$. Odległość F_1F_2 musi być mniejsza od $2a$, bo inaczej nie przywiążemy sznurka – niech więc będzie $F_1F_2 = \varepsilon \cdot 2a$, gdzie liczbę ε, zawartą między zerem i jednością, nazywa się *mimośrodem*.



Rys. 1

Znając szkolny wzór kosinusów, otrzymujemy stąd natychmiast opis elipsy używany przez Keplera (rys. 1). Mamy

$$r^2 + (2a\varepsilon)^2 - 2 \cdot r \cdot 2a\varepsilon \cdot \cos\varphi = (2a - r)^2.$$

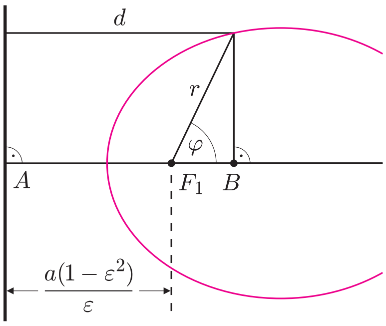
Stąd

$$r^2 + 4a^2\varepsilon^2 - 4ra\varepsilon\cos\varphi = 4a^2 - 4ra + r^2$$

i dzieląc stronami przez $4a$, otrzymujemy $r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a(1 - \varepsilon^2)$, czyli

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

a więc równanie elipsy w układzie biegunowym.



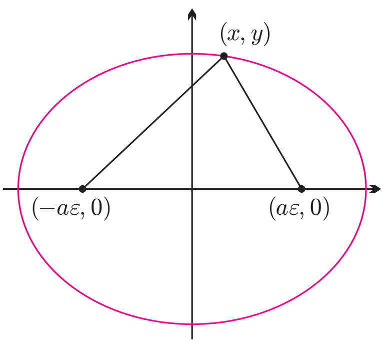
Rys. 2

Opis za pomocą kierownicy nie wymaga już niczego poza jej wskazaniem: dla ogniska F_1 jest to prosta prostopadła do prostej F_1F_2, po przeciwnej stronie niż F_2 i odległa od F_1 o $\frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon}$. Mamy wtedy (rys. 2)

$$d = AF_1 + F_1B = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} + \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon\cos\varphi}\cos\varphi =$$

$$= \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon(1-\varepsilon\cos\varphi)}(1 - \varepsilon\cos\varphi + \varepsilon\cos\varphi) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon(1-\varepsilon\cos\varphi)} = \frac{r}{\varepsilon}.$$

Zatem stosunek odległości punktów elipsy od ogniska i kierownicy jest stały.



Rys. 3

Wreszcie równanie we współrzędnych kartezjańskich. Niech ogniska mają współrzędne $(-a\varepsilon, 0)$ i $(a\varepsilon, 0)$ (rys. 3). Zapiszmy długość sznurka:

$$\sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2} = 2a,$$

czyli

$$\sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}.$$

Stąd

$$x^2 + 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$\varepsilon x - a = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$\varepsilon^2 x^2 - 2a\varepsilon x + a^2 = x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + y^2,$$

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

i ostatecznie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1.$$

Jak widać, ze sznurka wszystko natychmiast wynika.

Marek KORDOS