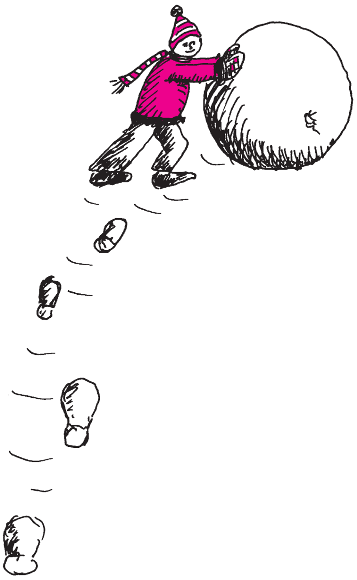
Astronomiczna tożsamość dla ciągu Fibonacciego



Trudno chyba o ciąg powszechniej znany w kręgach zbliżonych do matematyki, niż ciąg liczb całkowitych, wymyślony na początku XIII w. przez Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim. Wyrazy tego ciągu, noszącego nazwisko wynalazcy, oznacza się symbolem F_n i definiuje indukcyjnie:

$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Otrzymujemy kolejno liczby: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$, zwane, a jakże, liczbami Fibonacciego.

Zainteresowanie tym ciągiem jest skutkiem jego licznych interesujących własności. Jedną z nich jest tożsamość

$$(C_n) \qquad F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$$

prawdziwa dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Dla dowodu zauważmy, że $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, a stąd

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) = F_n^2 + F_{n+1}F_n - F_{n+1}^2 =$$
$$= F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2,$$

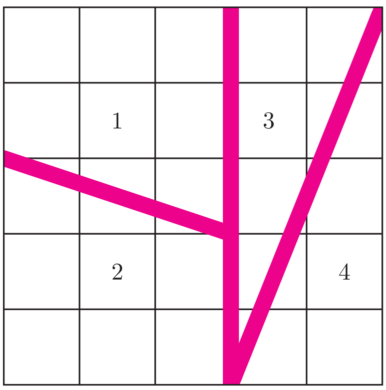
zatem

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n \;\Leftrightarrow\; F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^{n+1}.$$

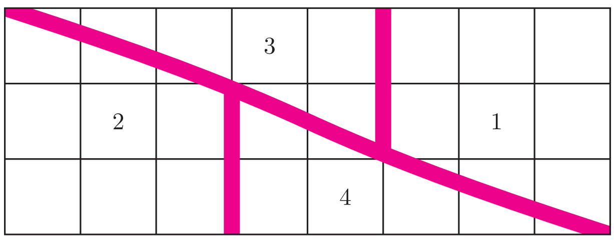
Tak więc albo równości (C_n) i (C_{n+1}) są jednocześnie prawdziwe, albo żadna z nich nie jest prawdziwa. Teraz wystarczy sprawdzić, że prawdziwa jest równość (C_1) :

$$F_1^2 - F_2F_0 = 1 - 2 \cdot 1 = (-1)^1$$

i wywnioskować z zasady indukcji prawdziwość każdej z tożsamości (C_n).



Przypomnijmy starą łamigłówkę: jak to możliwe, że ze wszystkich 25 kratek kwadratu można złożyć prostokąt o 24 kratkach, tak jak to sugeruje rysunek?

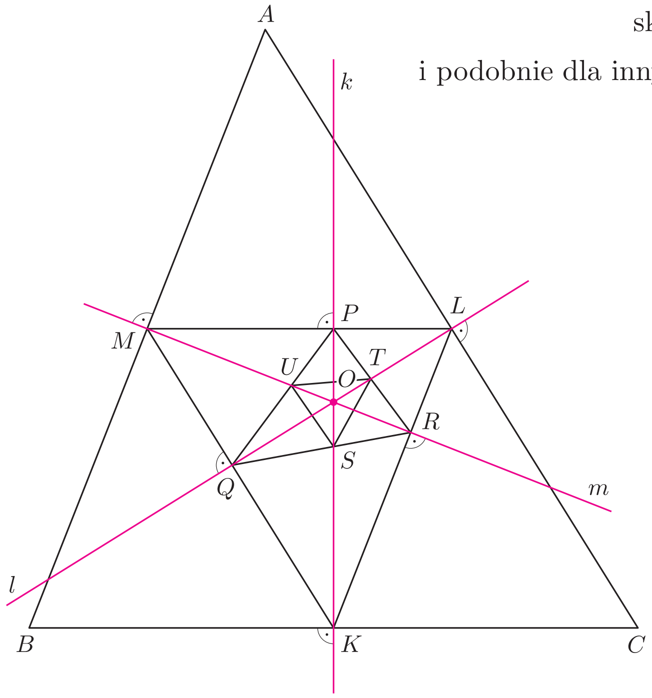


Jeśli zauważyłeś, drogi Czytelniku, związek długości boków poszczególnych wielokątów, pozornie składających się na każdą z dwóch figur, z ciągiem Fibonacciego, potrafisz podać przykład kwadratu, z którego „można” złożyć prostokąt o większym od niego polu.

Dlaczego tożsamość (C_n) nosi w tytule określenie „astronomiczna”? Tylko dlatego, że ogłosił ją w 1680 roku astronom Jean-Dominique Cassini, odkrywca „przerwy Cassiniego” (patrz *Delta* 9/2002), a znał ją wcześniej inny astronom, Johannes Kepler, o czym wiemy z jego listu napisanego ponad 70 lat wcześniej.

Geometryczna matrioszka

Matrioszka to ludowa lalka rosyjska – jest drewniana i wydrążona w środku, mieści tam podobną lalkę, tylko, rzecz jasna, mniejszą, ta mniejsza mieści jeszcze mniejszą itd.



Na rysunku mamy trójkąt ostrokątny ABC i jego symetralne boków k, l, m przecinające się w punkcie O. Punkt wspólny symetralnej jakiegoś boku z tymże bokiem to jego środek.

Środki boków trójkąta ABC tworzą trójkąt KLM. Proste k, l, m są w tym trójkącie wysokościami. Wynika to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa:

$$\text{skoro}\quad \frac{AL}{LC}=\frac{BK}{KC},\quad \text{to}\quad LK \parallel AB \perp m$$

i podobnie dla innych boków.

Punkty wspólne P, Q, R wysokości i przeciwległych boków trójkąta KLM też tworzą trójkąt. Ciągle te same proste k, l, m są w tym trójkącie dwusiecznymi.

Aby przekonać się o tym, potrzebne jest inne narzędzie niż twierdzenie Talesa, mianowicie twierdzenie orzekające, że

kąt prosty, którego ramiona przechodzą przez końce średnicy okręgu, ma wierzchołek na tym okręgu.

Szerzej znane jest jego twierdzenie odwrotne:

kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty.

Skoro tak, to punkty P i R leżą na okręgu o średnicy OL, z czego wynika, że kąty OPR i OLR są równe, jako wpisane, oparte na tym samym łuku.

Podobnie punkty P i Q leżą na okręgu o średnicy OM, z czego wynika, że kąty OPQ i OMQ są równe. I dalej: punkty Q i R leżą na okręgu o średnicy LM, z czego wynika, że kąty RMQ, czyli OMQ, i QLR, czyli OLR, są równe. Zatem równe są te wszystkie kąty; w szczególności

$$\sphericalangle OPQ = \sphericalangle OPR,$$

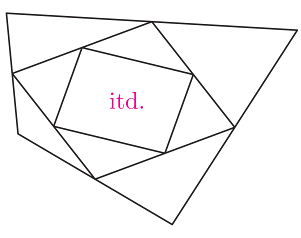
a więc k jest dwusieczną kąta QPR. Podobnie wykazujemy, że pozostałe dwie proste są dwusiecznymi.

Oczywiście, proste k, l, m przecinają boki trójkąta PQR – powstałe punkty S, T, U tworzą trójkąt. Jaką rolę w tym trójkącie pełnią proste, które poprzednio były już symetralnymi, wysokościami i dwusiecznymi?

Nic nam o tym nie wiadomo, czekamy więc na listy z odpowiedziami na to pytanie. Udokumentowaną odpowiedź opublikujemy i nagrodzimy książką. W przypadku, gdy udzieli jej uczeń, odpowiedź potraktujemy jako pracę na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

A przecież można narysować i dalsze trójkąty...

Zadanie z podobnym motywem



Mamy dowolny czworokąt C_0 i tworzymy z niego ciąg czworokątów zgodnie z regułą: dla $n=0, 1, 2, \ldots$ boki czworokąta C_{n+1} to odcinki łączące środki kolejnych boków czworokąta C_n. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich i, j, k mamy

$$\frac{|C_i|}{|C_{i+k}|}=\frac{|C_j|}{|C_{j+k}|},\quad \text{gdzie } |C_n| \text{ oznacza pole } C_n.$$

Gdy będziecie dawali to zadanie do zrobienia specjaliście, podstawcie pod i, j, k konkretne liczby. A gdy dla pewności będziecie chcieli mieć wskazówkę, to znajdziecie ją w innym miejscu tego numeru.

Małą Deltę przygotowali: Wiktor BARTOL i Marek KORDOS