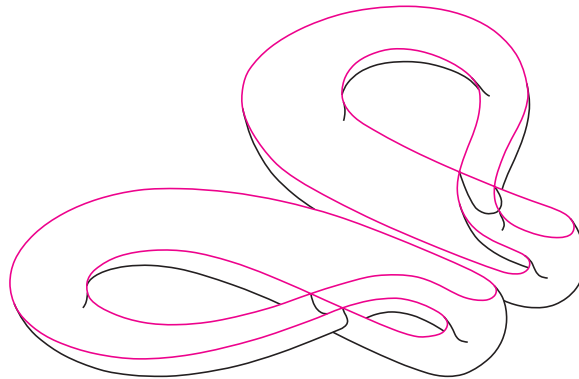
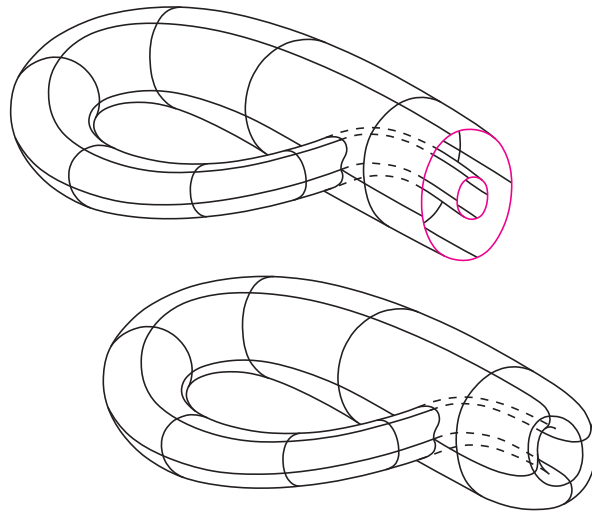


Butelka Kleina

Rurka z rozciągliwego tworzywa może być półfabrykatem do produkcji torusa. Wystarczy jej oba końce skleić. Sklejane okręgi mają przed sklejeniem tę samą orientację. Może się jednak zdarzyć, że ktoś złośliwy zmieni orientację jednego okręgu na przeciwną – wtedy sklejenie zgodne z orientacją już się nie powiedzie. Jest dla niego zbyt mało miejsca w przestrzeni trójwymiarowej. Ale od czegoż jest wyobraźnia. Wyobraźmy sobie, że jeden koniec rurki przeniknął do jej wnętrza, nie przecinając ścianki. Wtedy orientacje okręgów na końcach rurki już się zgadzają i można ją skleić. Właśnie wynik tego sklejenia nazywany jest *butelką Kleina* lub *torusem jednostronnym*.

Ta druga nazwa bierze się stąd, że butelkę Kleina można łatwo rozciąć na dwie wstęgi Möbiusa (na wszelki wypadek można zajrzeć do *Małej Delt* w numerze 9/2002), a wszystko, co zawiera choćby jedną wstęgę Möbiusa, jest jednostronne.

Butelka Kleina jest, oczywiście, nieorientowalna i szkoda, że w naszej zwykłej przestrzeni jej nie ma. Gdyby była, różniłaby się od torusa również tym, że są takie mapy na torusie, które pomalować tak, aby sąsiednie państwa były różnych kolorów, można dopiero siedmioma barwami, podczas gdy każdą mapę na butelce Kleina można pomalować w ten sposób już sześcioma.

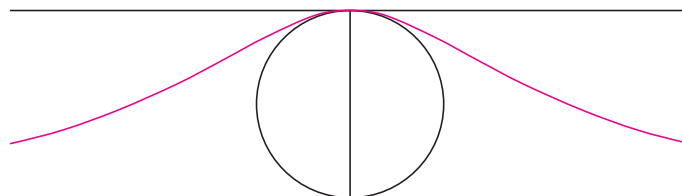


M. K.



Lok Agnesi

Maria Gaetana Agnesi (czyt. ańjesi) w 1748 roku opublikowała wiadomość o krzywej, którą nazwała *versiera*, co ma po włosku dwa znaczenia: *obracająca się* i *wiedźma*. Powstaje ona tak. Mamy dany okrąg i punkt P na nim oraz styczną k do okręgu w przeciwnym punkcie Q . Dla dowolnej prostej l przez P przecinającej prostą k w punkcie B i okrąg w punkcie A , prowadzimy przez A prostą m_l prostopadłą do PQ i przez B prostą n_l równoległą do PQ . Przecięcia m_l i n_l tworzą właśnie *versierę*, nazwaną później *lokiem Agnesi*.



Lok Agnesi jest krzywą algebraiczną trzeciego stopnia. W stosownym układzie współrzędnych jej równanie można zapisać jako $(x^2 + 4r^2)y - 8r^3 = 0$, gdzie r jest promieniem okręgu użytego do jej konstrukcji.

Jak nietrudno zauważyć, lok Agnesi ma asymptotę. Pole między lokiem a asymptotą jest cztery razy większe od pola koła użytego do jej konstrukcji. Natomiast jeśli obracać zarówno koło, jak i lok wokół asymptoty, okaże się, że objętość ograniczona obracającym lokiem jest dwa razy większa od objętości torusa (bez dziurki) utworzonego przez obracane koło.

M. K.