Linie geodezyjne

Tomasz KWAST

Każdy ma zapewne jakiś intuicyjny pogląd na to, co to jest linia prosta. Oczywistą cechą prostej jest m.in. to, że jej fragment, wyznaczony przez dwa punkty, jest najkrótszą linią łączącą te punkty. A czy linia najkrótsza musi być linią prostą? Okazuje się, że niekoniecznie, a zależy to od przestrzeni, której to pytanie dotyczy. W przestrzeni euklidesowej jedna z wymienionych własności linii pociąga za sobą nieuchronnie drugą. Ale jeżeli przestrzenią jest np. sfera, to najkrótsza linia łącząca leżące na niej dwa punkty (i leżąca w całości na sferze – to bardzo ważne!) – obrazowana przez naciągniętą między tymi punktami gumkę – jest w oczywisty sposób łukiem koła wielkiego. Rzecz jednak w tym, że jest ona łukiem z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego, niemieszkającego w omawianej przestrzeni, tzn. na sferze. Dla mieszkańca sfery (płaszczaka) jest ona linią „prostą” w tym właśnie sensie, że jest najkrótsza. Takie najkrótsze linie, będące uogólnieniem linii prostych znanych z życia codziennego, nazywają się liniami geodezyjnymi.

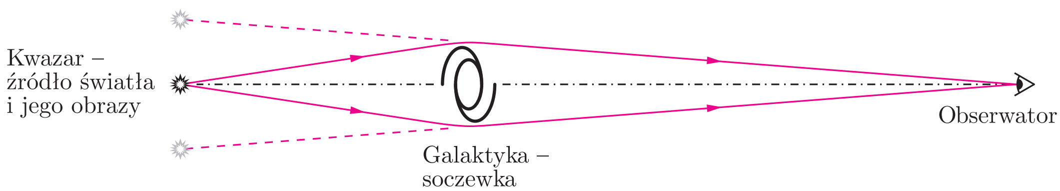
Znamy jednak bardziej złośliwe przestrzenie. Dwa punkty na powierzchni bocznej walca można połączyć symboliczną gumką, czyli linią geodezyjną, na dowolnie wiele sposobów, bo można ją poprowadzić rzeczywiście na oko najkrótszą drogą od jednego punktu do drugiego, albo opasawszy po drodze walec dowolną liczbę razy (chyba że oba punkty leżą na okręgu, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi walca). Aby więc nie kłopotać się tymi subtelnościami, definiuje się precyzyjniej linię geodezyjną jako linię lokalnie najkrótszą. Dodanie tego jednego słowa jest bardzo istotne, oznacza ono bowiem, że geodezyjną jest taka linia, której każdy łuk, łączący dwa dostatecznie bliskie punkty, jest łukiem najkrótszym.

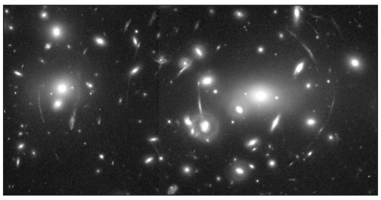
Według ogólnej teorii względności (OTW) fizyczną przestrzeń, w której żyjemy, można uważać za czterowymiarowy zbiór tzw. zdarzeń, tj. punktów, których trzy współrzędne opisują GDZIE coś się stało, a czwarta współrzędna określa KIEDY to się stało. Ta czterowymiarowa czasoprzestrzeń nie jest euklidesowa, lecz powyginana przez znajdujące się w niej masy. Genialność OTW polega m.in. na tym, że pozwoliła zastąpić mechanikę przez geometrię. Na przykład ruch sondy kosmicznej pod wpływem sił grawitacji słonecznej w zwykłej przestrzeni trójwymiarowej to ruch po linii geodezyjnej w czasoprzestrzeni powyginanej przez obecne w niej Słońce. W OTW nie mówi się o siłach, a sonda porusza się bezwładnie po linii geodezyjnej.

Czasoprzestrzeń ma pewną oryginalną cechę: linia geodezyjna łącząca dwa punkty czasoprzestrzeni (zdarzenia) może nie odpowiadać żadnej fizycznej trajektorii czegokolwiek. Na przykład po linii geodezyjnej łączącej zdarzenia „wystrzelenie sondy z Ziemi dziś” i „lądowanie sondy na Marsie za pół roku” może odbyć podróż statek kosmiczny. Niemożliwa jest natomiast podróż po linii łączącej zdarzenia „wystrzelenie sondy z Ziemi dziś o godz. 12:00” i „lądowanie sondy na Marsie dziś o godz. 12:01”, gdyż nie da się pokonać odległości Marsa od Ziemi w ciągu minuty. Sonda może lecieć do Marsa na różne sposoby (po różnych torach i w różnym czasie, czyli po rozmaitych liniach geodezyjnych), ale światło (poza szczególnymi przypadkami, patrz niżej) nie ma wyboru: drogę z Ziemi na Marsa (przy ustalonej konfiguracji planet) pokonuje tylko ze ściśle określoną prędkością c, ani szybciej, ani wolniej, i po jedynym możliwym torze. Mówi się, że fotony poruszają się po zerowych liniach geodezyjnych.

Trójwymiarowy tor promienia świetlnego (czyli trójwymiarowa część zerowej linii geodezyjnej żyjącej w czterowymiarowej czasoprzestrzeni) to naturalny model linii prostej. Okazuje się, że takich linii „prostych” może przez dwa punkty w przestrzeni trójwymiarowej przechodzić kilka. Niech między odległym kwazarem a obserwatorem znajduje się jakaś galaktyka. Zakrzywia ona w swoim sąsiedztwie czasoprzestrzeń tak, że fotony wysłane z kwazara mogą osiągnąć

Ziemię po różnych torach trójwymiarowych (rysunek) – na ogół też w różnym czasie, ale to już inna sprawa.





Galaktyka działa więc jak soczewka, dlatego nazywa się to zjawisko soczewkowaniem grawitacyjnym. Taka grawitacyjna soczewka jest zazwyczaj bardzo złej jakości – zamiast powiększonego kwazara obserwator widzi albo jego zniekształcony obraz, albo kilka świetlnych plamek na przedłużeniach promieni wpadających do oka, a zależy to od rozkładu masy w galaktyce soczewkującej i od wzajemnego ustawienia kwazara, galaktyki i obserwatora. Na przykład obrazem kwazara może stać się świetlny łuk ze zdjęcia obok.

Uginanie światła przez soczewkę grawitacyjną tak na oko przypomina zwyczajne ugięcie toru cząstki przelatującej z prędkością światła w pobliżu galaktyki grającej rolę soczewki. Jednak jeżeli nawet zapomnieć, że fotony nie mają masy, to mechanika klasyczna zastosowana do tego przypadku daje zły wynik ilościowy, gdyż odchylenie toru takiej cząstki jest inne niż ugięcie promienia świetlnego, które zostało już dawno zmierzone obserwacyjnie (*Delta* 5/1982) i które zgadza się z przewidywaniami OTW. Tak więc soczewkowanie grawitacyjne to naprawdę skutek ugięcia przestrzeni.

Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1009. Czy jedynym rozwiązaniem równania $1^x + 2^x + \ldots + x^x = y^y$ w liczbach naturalnych jest $x = 1$, $y = 1$?
Rozwiązanie na str. 16

M 1010. Wykazać, że równanie $x^3 + y^4 = z^5$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z.
Rozwiązanie na str. 16

M 1011. Znaleźć wszystkie k, l, m spełniające $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k \text{ razy}} + \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{l \text{ razy}} = \underbrace{5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}}_{m \text{ razy}}$.
Rozwiązanie na str. 10

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 585. Z jaką prędkością zacznie się wdzierać powietrze do bańki żarówki próżniowej, w której zrobiono mały otwór? Gęstość powietrza $\rho_0 = 1{,}29$ g/dm^3.
Rozwiązanie na str. 5

F 586. Na wózku mogącym poruszać się poziomo (tarcie pomijamy) umieszczono otwarte od góry naczynie, w którego tylnej ściance znajdował się mały otworek. Całość wystawiono na równomiernie padający deszcz w czasie bezwietrznej pogody. Po pewnym czasie poziom wody ustalił się, a wózek poruszał się ze stałą prędkością v. Na jakiej głębokości znajdował się wtedy otworek?
Rozwiązanie na str. 10