Komputer, człowiek, pies...

Michał SZUREK

Rozwiązanie zadania F 586.
Ponieważ pogoda jest bezwietrzna, zatem składowe poziome prędkości padających kropel deszczu są równe zeru. W stanie równowagi, gdy wózek porusza się ze stałą prędkością, tyle samo kropel wpada do naczynia, co z niego wypływa przez otworek. Z zasady zachowania pędu wynika więc, że prędkość wytryskującej wody względem powierzchni ziemi jest równa zeru, zatem prędkość wody względem wózeczka wynosi v. Ze znanego wzoru na prędkość V wody wypływającej przez mały otworek w ściance zbiornika na głębokości H

$$V=\sqrt{2gH}$$

otrzymujemy, że wysokość wody nad otworkiem ustaliła się na poziomie:

$$h=\frac{v^2}{2g}.$$

Rozwiązanie zadania M 1011.

Oznaczmy $a_{t,n}=\underbrace{t^{t^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{t}}}}}}_{n\text{ razy}}$, czyli

$$a_{t,1}=t,\qquad a_{t,n+1}=t^{a_{t,n}}.$$

Rozważmy reszty z dzielenia przez 5. Zauważmy, że gdy 5 nie dzieli u, to

$$u^i\equiv u^{i \bmod 4}(\bmod 5)$$

(bo $u^4\equiv 1(\bmod 5)$) oraz

$$u^i\equiv u^{i \bmod 2}(\bmod 4)$$

dla n nieparzystych. Zatem

$$a_{3,n}\equiv 3(\bmod 4)$$

dla dowolnego n, skąd

$$a_{3,n+1}\equiv 3^3\equiv 2(\bmod 5)\text{ dla } n\geqslant 1.$$

Podobnie

$$a_{2,n}\equiv 2^0=1(\bmod 5)\text{ dla } n\geqslant 3$$

i $a_{2,2}=4$. Zatem

$$a_{2,k}+a_{3,l}\equiv 0(\bmod 5)$$

jedynie, jeśli $k=l=1$. Istnieje zatem jedynie trywialne rozwiązanie $k=l=m=1$.

W 1979 roku *Delta* zamieściła cykl artykułów Dominika Roguli pod tytułem „Mechanika, komputer, człowiek”. Tekst jest interesujący i dzisiaj, chociaż wiele odkrywczych uwag zawartych w tamtym tekście jest dziś oczywistych dla każdego. Ale 1979 rok należał jeszcze do ery komputera łupanego...

Niemniej jednak wciąż wielu ludzi, w tym i nauczycieli, uważa, że w komputerze nie ma (bo być nie może) niczego więcej ponad to, co włożył tam człowiek. No, bo to tylko bezduszna maszyna, krążą w niej jakieś tam elektrony...

Słynny napis na Akademii Platońskiej Józef Maria Hoene-Wroński przełożył jako: „Nikt niegeometryczny tu nie wchodź”. Czy komputer miałby dziś wstęp do Akademii?

Na lekcjach matematyki w szkole komputer wciąż jest intruzem. Nie będę snuł teoretycznych rozważań, czy słusznie, czy nie. Pokażę tylko, *dożylnie*, jak można użyć elektroniki do lepszego POZNANIA tajników rozumowań geometrycznych.

O właśnie, bo historia zaczęła się pod Poznaniem. Piliśmy herbatę po wspólnym spacerze we trójkę po lesie (ja, miła pani Ela i pies). Uściślę: spacerowaliśmy we trójkę, ale potem pies herbaty nie pił.

– Czy umie Pan rozwiązać zadanie z tegorocznej Olimpiady Matematycznej? – zapytała p. Elżbieta.
– Nie, nie umiem – odparłem, zgodnie z prawdą.
– A zna Pan zadania?
– Nie; może zatem dlatego nie umiem rozwiązać – odpowiedziałem.
– No, to proszę zobaczyć, uczeń rozwiązał mi zadanie o graniastosłupie, ale coś tu jest źle. Zadanie jest takie:

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, tworząc w przekroju sześciokąt wypukły $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to

$$d_1^2+d_3^2+d_5^2=d_2^2+d_4^2+d_6^2.$$

No i co Pan na to?
– Hm – powiedziałem, chcąc zyskać na czasie – poproszę jeszcze herbaty. Świetna jest, ma nietypowy smak.
– Tak, to czerwona herbata.
– Skąd ją Pani ma?
– O, kupiłam w Kudowie Zdroju, trochę przypadkiem, ale byłam tam w jakimś nudnym towarzystwie i chodziłam sobie po sklepach.
– Naprawdę świetna. Nie, za ciasteczko dziękuję. A co do graniastosłupa to tak, tak, oczywiście, bardzo interesujące zadanie... No tak, ale na mnie już czas, bo pociąg nie zaczeka.

◇ ◇ ◇

Pociąg był pełny. Poszedłem do *Warsu*. Herbata była niesmaczna, nie mogłem pić. Sok grejpfrutowy był natomiast w porządku, *cool*, jak to się teraz mówi. Wyjąłem długopis i jak rasowy matematyk zacząłem pisać i rysować na serwetkach. Ziewnąłem. Za oknem przesuwała się Wielkopolska, mignął Swarzędz, potem Kostrzyn (spojrzałem na prawo, na las), Nekla, Podstolice, Września. Przystanek w Koninie. Ruszamy. O, trochę śniegu za oknem...

Z precyzyjnym myśleniem miałem kłopot (*to wszystko ta czerwona herbata, pomyślałem*). Szczęśliwie przypomniałem sobie, że przecież Tomasz Edison mawiał: *Po co myśleć? Eksperymentuj!* Wyjąłem kalkulator, programowany TI-83 i zacząłem... a jednak... trochę myśleć... że może by to sobie obliczyć? Nabrałem już dużej wprawy w posługiwaniu się tym kalkulatorkiem i uważam, że „wszystko” się da za jego pomocą zrobić. I rzeczywiście, gdyby pociąg jechał do Władywostoku, chyba bym wszystko wyliczył...

Ale cóż, jechaliśmy tylko do Warszawy. W domu włączyłem laptopa, wywołałem program *Mathematica*.

Wprowadziłem na płaszczyźnie podstawy układ współrzędnych tak, by wierzchołki podstawy graniastosłupa miały współrzędne

$$(\cos j\pi/3,\sin j\pi/3),\qquad \{j=0,1,2,3,4,5\}.$$

Oznaczyłem przez d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6 trzecie współrzędne punktów D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6. Zatem $d_1=0$, d_2 i d_3 zaś mogą być dowolne (z pewnymi nieistotnymi ograniczeniami).

Z wyznacznikowej postaci równania płaszczyzny wyliczyłem (tj. *On* wyliczył), że

$$d_4 = 2d_3 - 2d_2,$$
$$d_5 = 2d_3 - 3d_2,$$
$$d_6 = d_3 - 2d_2.$$

Oto stosowne komendy:

Wyznaczenie d_4:
```
Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3],
d2}, {1, Cos[2*Pi/3],Sin[2*Pi/3], d3}, {1, -1, 0, d4}}] ==0,
d4]]
```
Odpowiedź programu: `{d4 -> d1 - 2d2 + 2d3}`

Wyznaczenie d_5:
```
Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3],
d2}, {1, Cos[4*Pi/3], Sin[4*Pi/3], d5}, {1, -1, 0, d1 - 2d2 +
2d3}}] ==0, d5]]
```
Odpowiedź programu: `{d5 -> 2d1 - 3d2 + 2d3}`

Wyznaczenie d_6:
```
Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3],
d2}, {1, Cos[5*Pi/3], Sin[5*Pi/3], d6}, {1, -1, 0, d1 - 2d2 +
2d3}}] ==0, d6]]
```
Odpowiedź programu: `{d6 -> 2d1 - 2d2 + d3}`

Wyliczając naprzemienną sumę kwadratów odległości, sprawdziłem, że teza twierdzenia z zadania jest prawdziwa:
```
Simplify [d1^2 - d2^2 + d3^2 - (d1 - 2d2 + 2d3)^2 +
(2d1 - 3d2 + 2d3)^2 - (2d1 -2d2 + d3)^2]
```
Odpowiedź programu: `0`

Zero. Czyli zadanie rozwiązane, wszystko się zgadza. Ale, pomyślałem, czy nie można jeszcze tego skomplikować, zagmatwać, tak, by było już zupełnie nie do pojęcia? Można. Oto zebranie powyższych formuł w jedną, nie najlepiej napisaną z punktu widzenia sztuki pisania programów...

```
d1^2 - d2^2 + d3^2 - ( Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1},
{1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[2*Pi/3], Sin[2*Pi/3],
d3}, {1, -1, 0, d4}}] ==0, d4]] [[1, 1, 2]])^2 + ( Simplify[
Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1,
Cos[2*Pi/3], Sin[2*Pi/3], d3}, {1, Cos[5*Pi/3], Sin[5*Pi/3],
d5}}] ==0, d5]] [[1, 1, 2]])^2 - ( Simplify[ Solve[ Det[{{1,
1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[2*Pi/3],
Sin[2*Pi/3], d3}, {1, Cos[5Pi/3], Sin[5Pi/3], d6}}] ==0, d6]]
[[1, 1, 2]])^2
```

Na pytanie, czy istnieje Bóg, Leonard Euler napisał kilka nic nie znaczących formuł matematycznych i podobno wmówił słuchaczom, że to jest właśnie ten dowód. Być może Czytelnicy też uważają, że robię z nich niestosowne żarty... Ale przecież... przecież na ekranie pojawiło się zero. Zadanie rozwiązane.

Można postawić takiemu „rozwiązywaniu zadań geometrycznych” inne zarzuty. Że to profanacja, że zabija myślenie, że gdzież piękno i tak dalej.

Zabija myślenie? Gdzież piękno? Najpierw zdajmy sobie sprawę, że jeszcze nie umiemy tego zadania rozwiązać inaczej jak tylko za pomocą maszyny. Lepszy rydz niż nic.

Teraz sobie narysujmy wszystko. Lepszy byłby *Corel*, ale rysunki w programie *Mathematica* też nie są trudne do wykonania.

```
w1={0,0};w2={2,0};
w3={4,1};w4={3,2};
w5={1,2}; w6={-1,1};
w7={0,14};w8={2,14};
w9={4,15};w10={3,16};
w11={1,16}; w12={-1,15};
d1={0,1}; d2={2,3}; d3={4,7};
d4={3,9}; d5 = {1,7}; d6={-1,3};
      Show[
      Graphics[
         {
           {Thickness[0.01],
           Line[{w1,w2,w3,w4,w5,w6,w1}],
           Line[{w7,w8,w9,w10,w11,w12,w7}]},
              Line[{w1,w7}], Line [{w2,w8}],
              Line[{w3,w9}], Line[{w4,w10}],
              Line[{w5,w11}], Line[{w6,w12}],
           {PointSize[0.06], Point[d1], Point[d2],
           Point[d3], Point[d4], Point[d5],
           Point[d6]},
           {GrayLevel[0.5],Polygon [{d1,d2,d3,
           d4,d5,d6}]}
         },
           AspectRatio -> 1.5
              ]
          ]
```

Współrzędne wierzchołków graniastosłupa $(w_1, \ldots, w_{12})$ i punktów sześciokąta $(d_1, \ldots, d_6)$ są napisane wyżej. Zainteresowałem się własnościami tego sześciokąta. Zanim zacząłem myśleć, poprosiłem o wyliczenie jego rozmiarów.

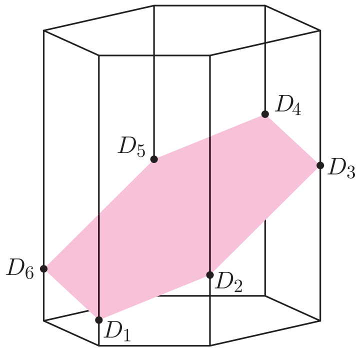
```
bok1 = Sqrt[(d2-d1).(d2-d1)];
bok2 = Sqrt[(d3-d2).(d3-d2)];
bok3 = Sqrt[(d4-d3).(d4-d3)];
bok4 = Sqrt[(d5-d4).(d5-d4)];
bok5 = Sqrt[(d6-d5).(d6-d5)];
bok6 = Sqrt[(d1-d6).(d1-d6)];
{bok1, bok2, bok3, bok4, bok5, bok6}
```

Odpowiedź programu: `{2 Sqrt[2], 2 Sqrt[5], Sqrt[5], 2 Sqrt[2], 2 Sqrt[5], Sqrt[5]}`

```
przek1 = Sqrt[(d4-d1).(d4-d1)];
przek2 = Sqrt[(d5-d2).(d5-d2)];
przek3 = Sqrt[(d6-d3).(d6-d3)];
{przek1, przek2, przek3}
```

Odpowiedź programu: `{Sqrt[73], Sqrt[17], Sqrt[41]}`

Czyli że boki sześciokąta mają długości $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$. Przekątne zaś długości $\sqrt{73}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{41}$. Teraz już wszystko o tym przekroju wiemy.



Dopiero teraz, gdy zobaczyłem to wszystko, przypomniałem sobie o figurach, które sam kiedyś nazwałem sześciorównoległobokami (kiedyś, dawno temu, w *Małej Delcie,* 1979 lub 1980). To sześciokąty, takie jak $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$ w zadaniu. Ich przeciwległe boki są równoległe i równej długości i dlatego sześciokąty te mają trochę własności podobnych do zwykłych równoległoboków. Oto kilka takich własności, szczególnie ciekawa jest ostatnia:

1. Leżące naprzeciwko siebie kąty sześciorównoległoboku są równe.
2. Przekątne (łączące przeciwległe wierzchołki) przecinają się w jednym punkcie, który połowi każdą z nich. Można – i tak zrobimy – ten punkt nazwać środkiem naszego wielokąta.
3. Sześciorównoległobokami można zapełnić całą płaszczyznę.
4. Pole sześciorównoległoboku jest równe iloczynowi długości podstawy przez wysokość... jeżeli tylko odpowiednio określimy podstawę i wysokość, np. że D_1D_3 to podstawa.
5. Środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok. Jeżeli zaś w dowolnym sześciokącie $ABCDEF$ połączymy środki (ciężkości) kolejnych trójkątów $ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB$, to otrzymamy sześciorównoległobok.

Poszedłem spać, było już dobrze po północy. Ranek był prześliczny: grudzień, niedziela, słońce, mróz, trochę śniegu. Poszedłem na spacer do Puszczy Kampinoskiej. Przystanąłem na wydmach, patrzyłem na zachód, na wierzchołki drzew. I nagle zdałem sobie sprawę, że całe zadanie jest bardzo łatwe. Przetnijmy graniastosłup płaszczyzną P przechodzącą przez środek przekroju; czyli przez punkt wspólny trzech jego przekątnych. Z symetrii wynika, że odległości „nieparzystych" wierzchołków od tej płaszczyzny są równe odpowiednim odległościom wierzchołków „parzystych". Zatem równe są też ich kwadraty. Płaszczyzna podstawy graniastosłupa jest odległa od P o stałą wielkość, powiedzmy h. Wystarczy teraz dokonać kilku drobnych rachunków...

Wciąż mi coś nie dawało spokoju. „Pobawię się komputerem" pomyślałem. Najpierw sprawdziłem, czy może suma sześcianów tych odległości jest równa. Ale nie była. No, to wziąłem ośmiokąt foremny zamiast sześciokąta i sześciany zamiast drugich potęg. Nacisnąłem *Enter* i nieco osłupiały spojrzałem na okrągłe zero na ekranie. Pojawienie się jego na ekranie było dowodem, że

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego ośmiokątnego, tworząc w przekroju ośmiokąt wypukły $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7D_8$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to

$$d_1^3 + d_3^3 + d_5^3 + d_7^3 = d_2^3 + d_4^3 + d_6^3 + d_8^3.$$

A jak dalej? Pomyślałem i wygenerowałem procedurę, która ma sprawdzać, czy dla graniastosłupa prawidłowego o podstawie $2k$-kątnej suma $(k-1)$-szych potęg odległości „nieparzystych" punktów jest równa sumie $(k-1)$-szych potęg odległości parzystych. Jeżeli wartość funkcji `gslup` dla danego k jest równa zeru, to dla tego k twierdzenie jest prawdziwe:

```
gslup[k_] :=
    Simplify
    [d1^(k-1) - d2^(k-1) + d3^(k-1) +
    Sum[
        (-1)^j*(Simplify
          [
           Solve
           [
             Det[{{1,1,0,d1},{1,Cos[Pi/k],Sin[Pi/k],d2},
             {1,Cos[2*Pi/k],Sin[2*Pi/k],d3},
             {1,Cos[j*Pi/k],Sin[j*Pi/k],x}}] ==0,x
            ]
            [[1,1,2]]
          ])^(k-1),
        {j,3,2k-1}
        ]
      ]
```

Obliczyłem (a raczej: obliczyło to moje urządzenie liczące), że liczby $2, 3, 4$ i 6 są miejscami zerowymi funkcji `gslup`. Czy znaczy to, że udowodniłem, naprawdę udowodniłem, że dla $k = 2, 3, 4$ i 6 jest prawdą, że:

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego $2k$-kątnego, tworząc w przekroju wielokąt wypukły $D_1D_2\ldots D_{2k}$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to

$$d_1^{k-1} + d_3^{k-1} + d_5^{k-1} + \ldots + d_{2k-1}^{k-1} = \\ = d_2^{k-1} + d_4^{k-1} + d_6^{k-1} + \ldots + d_{2k}^{k-1}.$$

Argument **za** jest właściwie tylko jeden, ale mocny: **komputer wyliczył**. Argumentów **przeciwko** uznaniu tego za dowód jest więcej: a nuż ja źle napisałem program, a nuż komputer się pomylił i w ogóle twierdzenie jest fałszywe? A może procesor źle zadziałał? No i w ogóle: czy dopuszczając takie „dowody", znajduję się jeszcze w obrębie matematyki? Czy można wierzyć bezdusznym maszynom?

I jeszcze jedno? Jeżeli takie twierdzenie jest prawdziwe, to dlaczego tylko dla $k = 2, 3, 4, 6$? Czy to nie dziwne?

To akurat nie. Program *Mathematica* zna dokładne wartości funkcji trygonometrycznych pewnych kątów, np. wielokrotności 30 stopni. Inne wartości podaje w przybliżeniu. Dlatego obliczenia dla innych kątów nie dawały zera.

Niemniej jednak ja sam nie jestem wcale przekonany, że **udowodniłem**. Podświadomie szukam błędu. Widocznie tkwię jeszcze w epoce króla Ćwieczka. To były czasy...

Niezależnie od tych nieco akademickich rozterek, zwróćmy uwagę, jak wielką pozytywną rolę odegrał komputer w moim myśleniu nad zadaniem: to On podsunął mi właściwą myśl, pomagał, sprawdzał, kontrolował. Był stale obecny, jak dobry pies-przyjaciel, który tęskni do nas, chce z nami być. A że czasem ugryzie? Taka jego, psiakrew, natura.

A poza tym: czy moglibyśmy sami, bez zabawy komputerem, wpaść na pomysł, że takie twierdzenie o $(k-1)$-szych potęgach może być prawdziwe?