12/02 (60)

Γ-limatias $_{n\to\infty}$

O RÓWNYCH SUMACH DWUNASTYCH POTĘG

Najbardziej imponującym znanym przykładem równych sum dwunastych potęg jest niewątpliwie równość dwóch sum siedmiu takich potęg

$$(12.7.7)\qquad 99^{12}+77^{12}+74^{12}+73^{12}+73^{12}+54^{12}+30^{12} = 95^{12}+89^{12}+88^{12}+48^{12}+42^{12}+37^{12}+3^{12},$$

którą odkrył Greg Childers w 2000 roku.

Do marca 2002 roku najmniejszą liczbą k, dla której znane było rozwiązanie typu $(12,6,k)$, tzn. nietrywialna równość sumy sześciu dwunastych potęg i sumy k dwunastych potęg, była liczba $k=15$.

Opowiem pokrótce, jak udało mi się znaleźć rozwiązanie następujące:

$$(12.6.12)\qquad 211^{12}+178^{12}+171^{12}+147^{12}+64^{12}+35^{12} = 213^{12}+170^{12}+156^{12}+117^{12}+117^{12}+104^{12}+78^{12}+60^{12}+51^{12}+42^{12}+26^{12}+16^{12}.$$

Jedną rzecz ustalmy na samym początku: nie wchodzi w rachubę przeglądanie wszystkich osiemnastek liczb i sprawdzanie, czy są one rozwiązaniami równania typu $(12,6,12)$ – przy liczbach 3-cyfrowych wchodzących w skład rozwiązania, takich sprawdzeń wykonać nie sposób.

Jak więc się za to zabrać?

Poczyńmy na początek kilka obserwacji.

Obserwacja 1. Dwunasta potęga liczby całkowitej przy dzieleniu przez 13 daje resztę 1 (na ogół) lub 0 (rzadko), w zależności od tego, czy liczba ta jest czy nie jest podzielna przez 13.

Obserwacja 2. Suma sześciu dwunastych potęg przy dzieleniu przez 13 daje resztę z przedziału 0–6. Zdecydowanie najbardziej prawdopodobna jest reszta 6.

Obserwacja 3. Suma 12. dwunastych potęg przy dzieleniu przez 13 daje resztę równą liczbie potęg liczb niepodzielnych przez 13. Im większa reszta, tym bardziej prawdopodobna przy losowym wyborze sumowanych potęg (słaby wyjątek – reszty 11 i 12 są jednakowo prawdopodobne).

Obserwacja 4. Wydaje się, że nie stracimy zbyt wiele, zakładając, że sumy po obu stronach równania $(12,6,12)$ przy dzieleniu przez 13 dają resztę 6. Dokładniejsze wyliczenia skłaniają mnie do przyjęcia, że 96,5% rozwiązań powinno tak właśnie wyglądać.

Obserwacja 5. Dwunasta potęga liczby całkowitej podzielna przez 13, dzieli się także przez 13^{12}.

Wniosek

Przyjmujemy więc, że wszystkie wyrazy po lewej stronie równania są niepodzielne przez 13, a w konsekwencji po prawej stronie musimy mieć 6 wyrazów niepodzielnych i 6 podzielnych przez 13. Mamy więc równanie

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}=g^{12}+h^{12}+i^{12}+j^{12}+k^{12}+l^{12}+m^{12}+n^{12}+o^{12}+p^{12}+q^{12}+r^{12},$$

w którym wyrazy a–l nie dzielą się przez 13, natomiast liczba $m^{12}+n^{12}+o^{12}+p^{12}+q^{12}+r^{12}$ jest podzielna przez 13^{12}. Zatem zachodzi kongruencja

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12} \equiv g^{12}+h^{12}+i^{12}+j^{12}+k^{12}+l^{12} (\mathrm{mod}\ 13^{12}).$$

Tak więc pierwszym krokiem jest znalezienie rozwiązań powyższej kongruencji. W tym celu należy przejrzeć szóstki liczb $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant e\geqslant f$ niepodzielnych przez 13 w celu znalezienia powtórzeń liczby

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12} (\mathrm{mod}\ 13^{12})$$

dla różnych szóstek. Ja przyjąłem przy tym ograniczenie $a<350$. Takich szóstek liczb jest około $1{,}65\cdot 10^{12}$, nie wchodzi więc w rachubę zgromadzenie ich naraz w pamięci komputera. Nie wchodząc zbytnio w szczegóły techniczne, dość powiedzieć, że wystarczy przebiec wszystkie liczby $R\equiv 6 (\mathrm{mod}\ 13)$, gdzie $0<R<13^6$, i dla każdej takiej liczby R wygenerować tylko te szóstki (a,b,c,d,e,f), dla których

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12} \equiv R (\mathrm{mod}\ 13^6),$$

co już komputer naraz spamiętać potrafi.

Do wybranych a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l usiłujemy dobrać m,n,o,p,q,r z uprzednio przygotowanej tabeli szóstek liczb podzielnych przez 13, posortowanej według reszty z dzielenia liczby

$$m^{12}+n^{12}+o^{12}+p^{12}+q^{12}+r^{12}$$

przez ustaloną liczbę pierwszą.

Pełny przebieg programu trwałby ponad miesiąc, gdyby nie to, że przerwałem obliczenia po znalezieniu dwóch rozwiązań.

O LICZBIE 343

Z okazji **343.** numeru *Delty* przedstawiamy **7** własności liczby $\mathbf{7^3}$.

1. $\mathbf{343=(3+4)^3}$.
2. Liczba $\mathbf{3^{4^3}}$ w zapisie dziesiętnym rozpoczyna się cyframi **343**...
3. ...natomiast liczba $\mathbf{7^{343}}$ cyframi **343** się kończy...
4. ...podobnie zresztą jak liczba $\mathbf{7^{43}}$.
5. Natomiast z liczby $\mathbf{7^7}=82\mathbf{3543}$ otrzymujemy **343** po wykreśleniu odpowiednich cyfr.
6. Suma dzielników liczby $\mathbf{7^3}$ jest kwadratem liczby całkowitej.
7. Najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią n, taką że dla dowolnej liczby pierwszej $p\leqslant 37$ reszta z dzielenia liczby $\mathbf{343}^n$ przez p jest kwadratem liczby całkowitej, jest liczba **60** – numer dzisiejszego Gammalimatiasu.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl