Rozwiązanie zadania F 583.
Woltomierze są jednakowe, zatem stosunki prądów płynących przez nie, są równe odpowiednio stosunkom wskazań woltomierzy. Oznaczając opór każdego woltomierza przez R mamy

$$U_3 = U_2 - RI_2,$$
$$U_2 = U_1 - R(I_2 + I_3).$$

Stąd

$$\frac{I_2 + I_3}{I_3} = \frac{U_2 + U_3}{U_3} = \frac{U_1 - U_2}{U_2 - U_3}.$$

Zatem

$$U_2^2 - U_3^2 = U_1U_3 - U_2U_3,$$

i ostatecznie

$$U_2 = -\frac{U_3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}U_3^2 + U_1U_2} \approx 8{,}6\ \mathrm{V}.$$

rozłożyć liczbę n na czynniki. W pozostałych dwóch przypadkach Antek nie dostaje żadnej nowej informacji poza tą, którą miał na początku. Jeśli bowiem otrzymał od Bartka liczbę x_1, czyli x, to oczywiście nie dowiedział się niczego nowego. Jeśli natomiast otrzymał liczbę x_4, to zauważa, że dostał liczbę $n - x$, czyli też nie dowiaduje się niczego nowego.

Podsumujmy: jeśli Bartek wylosuje x_1 lub x_4, to Antek nie dowiaduje się niczego nowego poza tym, co wiedział na początku gry: zna liczbę n i wybraną przez siebie liczbę x. Jeśli natomiast Bartek wylosuje x_2 lub x_3, to umożliwi Antkowi rozłożenie liczby n na czynniki. Teraz można już umówić się, kto wygrywa w tej grze. Jeśli na końcu Antek umie rozłożyć n na czynniki, to wygrywa, jeśli nie umie, to przegrywa. Widzimy, że zasadnicze rozstrzygnięcie gry nastąpiło w momencie losowania jednej z czterech liczb przez Bartka. W dwóch przypadkach wygrywa Antek, w dwóch Bartek. To tak, jakby Bartek rzucił monetą, która ma dwa orły i dwie reszki. Jeśli wypadnie którykolwiek z orłów, to wygrywa Bartek; jeśli którakolwiek z reszek, to wygrywa Antek. Zatem każdy z nich ma prawdopodobieństwo wygranej równe $\frac{1}{2}$, tak jak przy rzucie zwykłą monetą.

Dokładniejsza analiza pokazuje, że Antek ma nieco większą szansę na wygranie. Może on bowiem po prostu zgadnąć jeden z czynników pierwszych liczby n. Może także, wybierając liczbę x, trafić na liczbę podzielną przez p lub przez q i rozłożyć w ten sposób n na czynniki. Prawdopodobieństwa tych zdarzeń są jednak tak bardzo małe, że w praktyce możemy je zaniedbać.

Innymi grami losowymi, w które trudno grać na odległość, są gry w karty. Wynaleziono inne metody, za pomocą których można rozdać karty graczom tak, by mogli zagrać np. w pokera. Inaczej jest jednak z grą w brydża: to jest gra par, a nie indywidualnych graczy i trudno byłoby zapobiec nielegalnej wymianie informacji między graczami w jednej parze.

Skojarzenia

Witold BEDNAREK

W teorii liczb rozważane są, między innymi, następujące liczby (do tej pory nie wiadomo, czy jest ich nieskończenie wiele):

A. Liczby pierwsze bliźniacze: para liczb pierwszych różniących się o 2, a więc postaci p i $p + 2$.

B. Liczby pierwsze Mersenne'a: liczby pierwsze postaci $2^p - 1$.

C. Liczby pierwsze Sophie Germain: takie liczby pierwsze p, że $2p + 1$ jest również liczbą pierwszą.

A z C

Czy istnieje para liczb bliźniaczych będących liczbami Sophie Germain?

Liczby:

$$p, \quad p + 2, \quad 2p + 1, \quad 2(p + 2) + 1$$

muszą być pierwsze. Nie może być $p = 2$, bo wtedy $p + 2 = 4$ jest liczbą złożoną. Jeżeli $p = 3$, to pozostałe liczby: 5, 7, 11 są pierwsze. Załóżmy dalej, że $p > 3$. Wówczas p jest postaci $3k + 1$ lub $3k + 2$. W pierwszym przypadku liczba

$$p + 2 = (3k + 1) + 2 = 3(k + 1)$$

jest złożona. W drugim przypadku liczba

$$2(p + 2) + 1 = 2(3k + 2 + 2) + 1 = 3(2k + 3)$$

też jest złożona. Ostatecznie stwierdzamy, że jedyną taką parą są liczby 3 i 5.

A z B

Czy istnieje para liczb bliźniaczych będących liczbami Mersenne'a?

Mamy równanie

$$(2^{p_1} - 1) - (2^{p_2} - 1) = 2,$$

czyli $2^{p_4} - 2^{p_2} = 2$. Jedyną parą potęg dwójki różniącą się o 2 jest para 4 i 2, a więc $2^{p_1} = 4$ i $2^{p_2} = 2$. Stąd $p_1 = 2$ i $p_2 = 1$, ale 1 nie jest liczbą pierwszą. Zatem odpowiedź jest negatywna.

B z C

Czy istnieje liczba Mersenne'a będąca liczbą Sophie Germain?

Liczby

$$2^p - 1 \quad \text{i} \quad 2(2^p - 1) + 1$$

muszą być pierwsze. Mamy

$$2(2^p - 1) + 1 = 2^{p+1} - 1.$$

Jeżeli $p = 2$, to liczby

$$2^p - 1 = 2^2 - 1 = 3 \quad \text{i} \quad 2^{p+1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

są pierwsze. Jeżeli $p > 2$, to p jest nieparzyste, czyli $p = 2k + 1$. Zatem

$$2^{p+1} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = (2^{k+1} - 1)(2^{k+1} + 1)$$

jest liczbą złożoną. Wobec tego tylko liczba 3 jest zarówno liczbą Mersenne'a, jak i liczbą Sophie Germain.