Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu można znaleźć w poprzednim i następnym numerze *Delty.*
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2002

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **435** ($WT = 1{,}66$) i **436** ($WT = 2{,}63$)
z numeru 2/2002

Jacek Klisowski	– Lublin	43,23
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	39,43

Zadania z matematyki nr 447, 448

Redaguje Marcin E. KUCZMA

447. Odcinek CD jest dwusieczną kąta C trójkąta ABC. Prosta ℓ jest styczna do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD w punktach P i Q. Dowieść, że jest ona także styczna do okręgu przechodzącego przez środki odcinków AD, BD i PQ.

448. Udowodnić, że dla każdej czwórki liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{b-a}{d+a}+\frac{c-b}{a+b}+\frac{d-c}{b+c}+\frac{a-d}{c+d}\geqslant 0.$$

Zadanie **448** zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2002

Przypominamy treść zadań:

443. Rozważamy alfabet złożony z trzech znaków: 0, 1, 2. Niech a_n będzie liczbą słów długości n, w których nie występuje blok 11 ani 22. Niech b_n będzie liczbą słów długości n, w których nie występuje blok trójelementowy złożony z trzech różnych znaków. Wykazać, że $3a_n = b_{n+1}$.

444. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Prosta EF przecina okrąg opisany na trójkącie AEB w punktach E i P, a okrąg opisany na trójkącie AFC w punktach F i Q. Udowodnić, że punkt A jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PDQ wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

443. Słowo, w którym nie występuje blok 11 ani 22, nazwijmy *ładnym*. Słowo, w którym nie występuje żaden z bloków 012, 021, 102, 120, 201, 210, nazwijmy *dobrym*.

Niech x_n będzie liczbą słów ładnych długości n (krótko: n-słów ładnych), zakończonych znakiem 1 lub 2, i niech y_n będzie liczbą n-słów ładnych, zakończonych znakiem 0; zatem $a_n = x_n + y_n$. Z ładnego n-słowa pierwszego z tych typów można przez dopisanie jednego znaku uzyskać jedno ładne $(n{+}1)$-słowo pierwszego typu i jedno drugiego typu. Z ładnego słowa drugiego typu można uzyskać dwa ładne słowa pierwszego typu i jedno drugiego typu. Wobec tego $x_{n+1} = x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$. Niech teraz u_n będzie (dla $n\geqslant 2$) liczbą n-słów dobrych, zakończonych dwoma znakami różnymi, i niech v_n będzie liczbą n-słów dobrych, zakończonych dwoma znakami jednakowymi; tak więc $b_n = u_n + v_n$. Rozumując podobnie, jak poprzednio, dostajemy wzory $u_{n+1} = u_n + 2v_n$, $v_{n+1} = u_n + v_n$ – identyczne z zależnościami rekurencyjnymi dla ciągów (x_n), (y_n). Łatwo sprawdzić, że $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $u_2 = 6$, $v_2 = 3$. Stąd przez indukcję wynikają równości $3x_n = u_{n+1}$ i $3y_n = v_{n+1}$ dla wszystkich $n\geqslant 1$. Dodajemy je stronami i mamy tezę: $3a_n = b_{n+1}$.

444. Oznaczmy punkt przecięcia odcinków AD, BE, CF przez S.

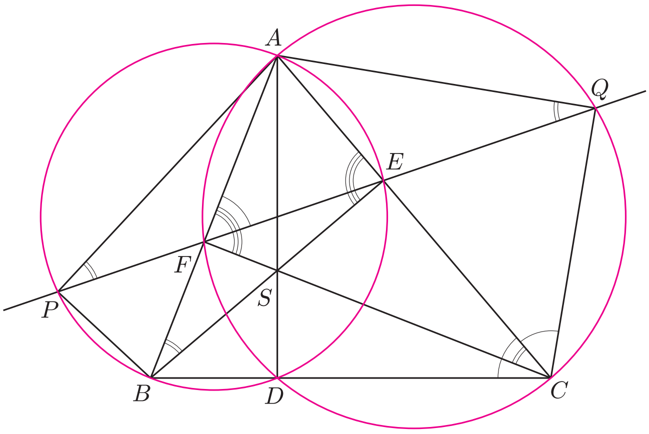
Jeżeli A jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PDQ, to trójkąt APQ jest równoramienny ($|AP| = |AQ|$). Stąd i z określenia punktów P i Q wynika, że $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle APE| = |\sphericalangle AQF| = |\sphericalangle ACF|$, a zatem na czworokącie $BCEF$ można opisać okrąg. W takim razie $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle QFA| = |\sphericalangle QCA|$. Trójkąty DCA i QCA mają wspólny bok CA oraz równe boki AD, AQ i równe kąty DCA, QCA. Stąd wynika alternatywa
$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle AQC|$ lub $|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle AQC| = 180^\circ$.

Jeżeli zachodzi pierwsza równość, to trójkąty DCA i QCA są przystające, więc $|\sphericalangle EAS| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle CFQ| = |\sphericalangle SFE|$, co oznacza, że na czworokącie $SEAF$ można opisać okrąg.

Jeżeli zachodzi druga równość, to punkt D leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, Q, A, F. Stąd oraz z istnienia okręgu $(BCEF)$ dostajemy zależność $|\sphericalangle FAS| = |\sphericalangle FAD| = |\sphericalangle FCD| = |\sphericalangle FCB| = |\sphericalangle FEB| = |\sphericalangle FES|$, która pokazuje, że także w tym przypadku można na czworokącie $SEAF$ opisać okrąg.

Ponieważ wreszcie $|\sphericalangle SEA| = |\sphericalangle BEA| = 180^\circ - |\sphericalangle EAB| - |\sphericalangle ABE| = 180^\circ - |\sphericalangle CAF| - |\sphericalangle ACF| = |\sphericalangle CFA| = |\sphericalangle SFA|$, zatem z istnienia okręgu opisanego na czworokącie $SEAF$ wynika, że $|\sphericalangle SEA| = |\sphericalangle SFA| = 90^\circ$, czyli odcinki BE, CF (i AD) są wysokościami trójkąta ABC.

Na odwrót, gdy te trzy odcinki są wysokościami, to na każdym z czworokątów $BCEF$, $CAFD$, $ABDE$ można opisać okrąg. Drugi z tych okręgów przechodzi przez punkt Q, a trzeci przez P. Zatem $|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle AFQ| = |\sphericalangle ADQ|$, czyli trójkąt ADQ jest równoramienny: $|AD| = |AQ|$. Analogicznie uzasadniamy równość $|AD| = |AP|$. Tak więc punkt A jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PDQ.

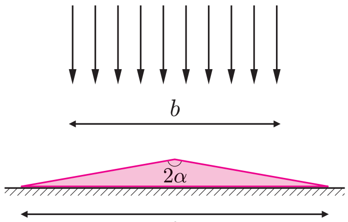


Zadania z fizyki nr 344, 345

Redaguje Jerzy B. BROJAN

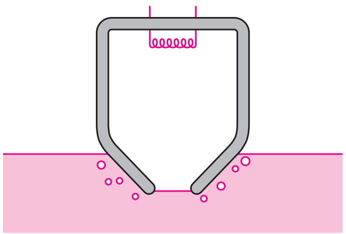
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2002

344. Na powierzchni poziomej może poruszać się bez tarcia pryzmat, którego przekrój poprzeczny jest trójkątem równoramiennym o podstawie a i kącie łamiącym $2\alpha = 160°$ (rys. 1). Współczynnik załamania szkła pryzmatu jest równy $n = 1{,}5$. Na pryzmat skierowano pionowo od góry wiązkę światła o szerokości $b = (3/4)a$ i mocy $P = 8000$ W, równo rozłożonej na tej szerokości. Naszkicować wykres siły F działającej na pryzmat w kierunku poziomym, w zależności od przesunięcia x środka pryzmatu względem środka wiązki. Obliczyć maksymalną wartość tej siły. Pominąć odbicie światła od którejkolwiek z rozpatrywanych powierzchni.



Rys. 1

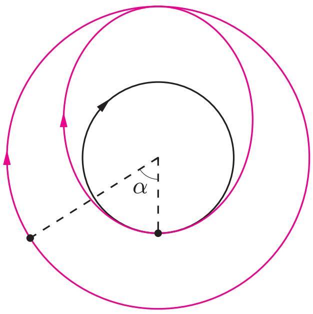
345. Naczynie o porowatych ściankach włożono otworem do wody (rys. 2). Gdy włączono spiralę grzejną, z naczynia zaczęły wydobywać się pęcherzyki powietrza, przy czym proces ten miał charakter stacjonarny (nie mijał po ustaleniu się temperatury). Wyjaśnić przyczynę zjawiska.


Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2002

Przypominamy treść zadań:

340. Dwie stacje kosmiczne krążą wokół Ziemi po orbitach kołowych leżących w tej samej płaszczyźnie, przy czym zwrot obiegu orbit jest zgodny, a ich promienie wynoszą odpowiednio R_Z i $2R_Z$, gdzie R_Z jest promieniem Ziemi (oczywiście, w praktyce promień pierwszej orbity musi być nieco większy ze względu na opór powietrza). Aby przenieść się z pierwszej stacji na drugą, kosmonauta wsiada do „taksówki kosmicznej", która odłącza się od pierwszej stacji i rozpędza do prędkości takiej, aby jej orbita sięgnęła orbity drugiej stacji (rys. 3); w chwili zbliżenia do drugiej stacji kolejne włączenie napędu „taksówki" powoduje zrównanie prędkości obu pojazdów. Oba czasy rozpędzania „taksówki" uznajemy za bardzo krótkie w porównaniu z okresem obiegu Ziemi przez którąkolwiek ze stacji.
a) Ile powinien wynosić przyrost prędkości „taksówki" przy każdym włączeniu napędu? Dana jest wartość I prędkości kosmicznej v_k (prędkości orbitalnej pierwszej stacji).
b) O jaki kąt α powinna wyprzedzać druga stacja pierwszą w chwili rozpoczęcia podróży „taksówki", czyli przy pierwszym włączeniu silników?



Rys. 3

341. Oporność termistora półprzewodnikowego zależy od temperatury według rysunku 4 (str. 16), a szybkość odpływu ciepła z termistora zależy od temperatury według rysunku 5 (str. 16). Jakie maksymalne napięcie można przyłożyć do termistora, nie powodując przy tym nieograniczonego wzrostu temperatury?

340. Postępując podobnie jak przy wyprowadzeniu III prawa Keplera (tzn. podstawiając siłę grawitacji jako siłę dośrodkową w ruchu po okręgu) dochodzimy do wniosku, że prędkość ruchu po orbicie kołowej o promieniu r jest dana wzorem

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

gdzie M – masa Ziemi, G – stała grawitacji. Widzimy, że prędkość drugiej stacji jest równa

$$\sqrt{\frac{1}{2}}v_k.$$

W następnym kroku rozważmy ruch „taksówki" po elipsie, dla której perygeum jest odległe od środka Ziemi o r_1, a apogeum o r_2. Oznaczmy odpowiednie prędkości przez v_1 i v_2; z zasady zachowania momentu pędu wynika równanie $v_1 r_1 = v_2 r_2$, a z zasady zachowania energii – równanie

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{GM}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{GM}{r_2}.$$

Rozwiązania mają postać

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1+r_2)}} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1+r_2)}}$$

a po podstawieniu $r_1 = R_z$, $r_2 = 2R_z$ otrzymujemy

$$v_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}v_k \quad \text{i} \quad v_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}v_k.$$

Zatem szukany przyrost prędkości przy pierwszym rozpędzeniu wynosi

$$\Delta v_1 = \left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)v_k \approx 0{,}155v_k,$$

a przy drugim:

$$\Delta v_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)v_k \approx 0{,}130v_k.$$

Aby obliczyć kąt początkowego wyprzedzenia pierwszej stacji przez drugą, trzeba wiedzieć, że w III prawie Keplera dla orbit eliptycznych rolę promienia pełni wielka półoś elipsy. Stąd wynika związek

$$\frac{T}{T_2} = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right]^{3/2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}$$

gdzie T jest okresem obiegu Ziemi przez „taksówkę", a T_2 – przez drugą stację. Dalej nietrudno już wyliczyć, że

$$\alpha = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}\right) \cdot 180° = 63{,}1°.$$