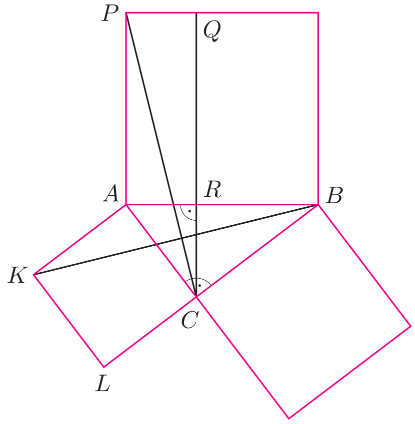
Majtki Pitagorasa

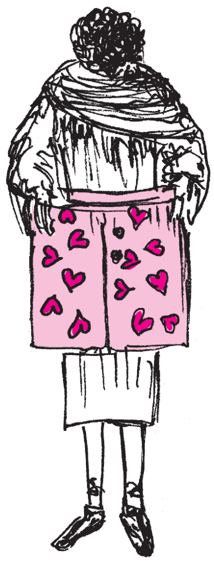
Пифагоровы штаны
с каждой стороны равны.

Termin **majtki Pitagorasa** został prawdopodobnie wymyślony przez Kisielowa, autora najpopularniejszego, wydawanego wiele dziesiątek lat podręcznika matematyki.

Bierze się on z sugestii, iż kolorowa część poniższego rysunku przypomina właśnie tę część garderoby, choć trudno się zgodzić, aby były one z każdej strony jednakowe.



Problemem, jakie mianowicie są w rzeczywistości nogawki majtek Pitagorasa, zajęli się już Starożytni, co mamy pięknie udokumentowane w *Elementach* Euklidesa.



Euklides zauważył, że przedłużenie wysokości (rozporek?) trójkąta prostokątnego, wokół którego uszyte są majtki, dzieli ich górną część na kawałki równoważne odpowiednim, leżącym po tej samej stronie nogawkom.

Wykażemy to dla lewej nogawki (bo dowód dla prawej jest zupełnie analogiczny).

Ponieważ QR jest przedłużeniem wysokości CR i ponieważ $AP \parallel QR$, więc

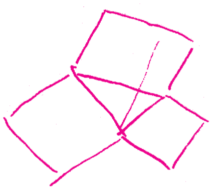
$$2 \cdot S_{APC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PQ = AP \cdot PQ = S_{APQR}.$$

Z kolei ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny i, wobec tego, punkty B, C i L leżą na jednej prostej i ponieważ $AK \parallel LC$, więc

$$2 \cdot S_{ABK} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AK \cdot KL = AK \cdot KL = S_{AKLC}.$$

Teraz zauważmy, że trójkąty APC i ABK są przystające. Istotnie, $AP = AB$, bo to boki tego samego kwadratu, podobnie $AC = AK$ i wreszcie

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAC + 90^\circ = \sphericalangle BAK.$$

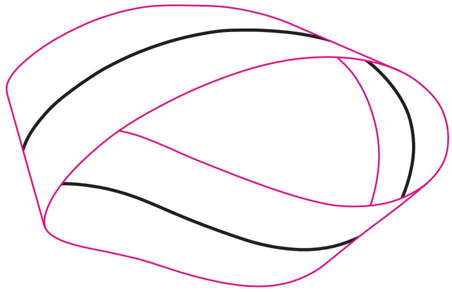


Majtki Pitagorasa

Wobec tego

$$S_{APC} = S_{ABK}, \quad \text{a zatem} \quad S_{APQR} = S_{AKLC}.$$

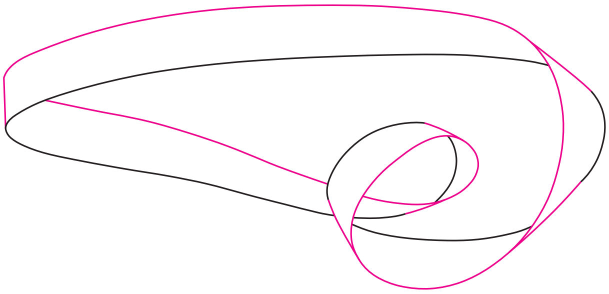
Oczywiście to twierdzenie o nogawkach jest też dowodem twierdzenia o całych majtkach, czyli twierdzenia Pitagorasa.



Wstęga Möbiusa

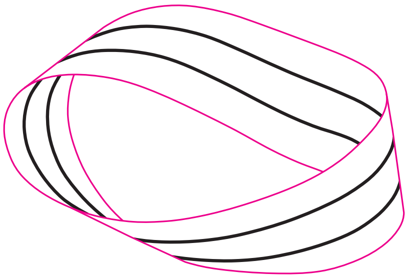
Jeżeli pasek papieru skręcimy o 180° i skleimy jego końce, to będziemy dysponowali **wstęgą Möbiusa**.

Jest to bardzo interesujący obiekt. Z każdego jego punktu można zawędrować do każdego innego nie przekraczając jego brzegu. Nie ma w tym nic dziwnego, ale idąc np. wzdłuż linii środkowej sklejonego paska po pewnym czasie znajdziemy się w tym samym miejscu, lecz „do góry nogami”. Taką własność powierzchni nazywa się *jednostronnością*.

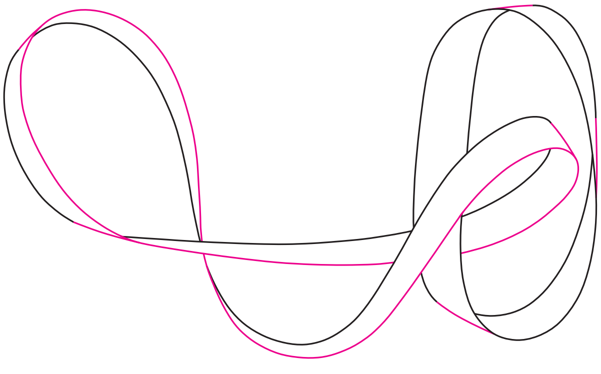


Zauważmy, że zawsze towarzyszy jej inna własność – nieorientowalność. Oznacza ona, że małe kółko z zaznaczoną orientacją po przebyciu poprzednio opisanej drogi będzie zorientowane przeciwnie.

Wstęga Möbiusa ma brzeg w jednym kawałku – podobnie jak koło. Jeśli spojrzeć na ten brzeg z punktu widzenia węzłów i splotów (patrz *Delta* 4/2002 i 5/2002), to okaże się, że jest to węzeł trywialny, czyli gdyby usunąć wstęgę i zostawić sam brzeg, byłby to zwyczajny okrąg, tylko trochę zdeformowany.



Ciekawe rzeczy dzieją się ze wstęgą, gdy ją przecinać. Oczywiście przecięcie w poprzek daje zwykły pasek papieru, więc przecinajmy wzdłuż, po liniach równo odległych do brzegu. Okazuje się, że wstęga Möbiusa wie, gdzie ma swoją linię środkową. Przetnijmy ją bowiem wzdłuż tej linii, a potem trochę obok, np. w $\frac{1}{3}$ szerokości od brzegu. Okaże się, że drugie rozcięcie będzie zawsze dwukrotnie dłuższe od pierwszego. I inne też będą jego efekty.



W wyniku pierwszego cięcia otrzymamy jedną powierzchnię, ale z powrotem dwustronną. Jej dwa brzegi będą tworzyły splot dwóch okręgów zaczepionych jeden w drugim. W wyniku drugiego cięcia otrzymamy dwie zaplecione powierzchnie; jedna będzie taką samą wstęgą Möbiusa, jak była rozcinana, druga zaś będzie powierzchnią dwustronną (a więc dwubrzeżną, orientowalną), którą można uzyskać z paska papieru podobnie jak wstęgę Möbiusa, tylko po skręceniu paska o 360°. Zauważmy jednak, że nie jest to taka powierzchnia, jak otrzymana przez rozcięcie wstęgi Möbiusa wzdłuż linii środkowej – tamta powstaje z paska skręconego o 720°.

Skoro już zdecydowaliśmy się skręcać papier o różne wielokrotności kąta 180°, to zobaczmy, co się stanie, gdy skleimy pasek papieru skręcony o 540°. Sądzę, że każdy z łatwością sprawdzi, że jest to powierzchnia jednostronna, nieorientowalna, o jednym brzegu, ale tym razem tworzącym węzeł zwany trójlistnikiem.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS