Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2002

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 445, 446

Redaguje Marcin E. KUCZMA

445. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla $x, y\in\mathbb{R}$ równanie

$$f\big(f(x-y)\big) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy.$$

446. Liczby całkowite a, b są związane równością $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Dowieść, że różnica $a-b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie **446** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **433** ($WT = 2{,}53$) i **434** ($WT = 1{,}14$)
z numeru 1/2002

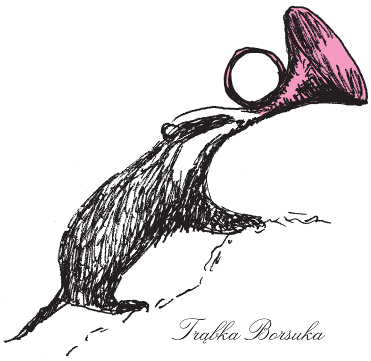
Jacek Klisowski	– Lublin	41,57
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	37,40

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2002

Przypominamy treść zadań:

441. Rozważamy wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach rzeczywistych a, b, c, d oraz trójmian kwadratowy $T(x) = x^2 + px + q$ ze współczynnikami $p = 2 - a + b$, $q = W(-1)$. Dowieść, że jeżeli trójmian $T(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek nieujemny, to wielomian $W(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

442. Niech J oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż 1. Czy istnieje funkcja $f\colon J\to J$, ciągła, ściśle rosnąca i taka, że wartości funkcji $g(x) = f(x)/x$ wypełniają zbiór wszystkich liczb dodatnich?



441. Niech α będzie nieujemnym pierwiastkiem trójmianu T i niech $\beta = \sqrt{\alpha+1}$. Wielomiany W i T są związane tożsamością

$$W(x) = T(x^2-1) + (x+1)(ax^2+c).$$

Podstawiamy w niej $x=\beta$ oraz $x=-\beta$ i otrzymujemy związki

$$W(\pm\beta) = (1\pm\beta)(a\beta^2+c),$$

które mnożymy stronami:

$$W(\beta)W(-\beta) = (1-\beta^2)(a\beta^2+c)^2 \leqslant 0.$$

Stąd wynika, że w przedziale $\langle -\beta;\beta\rangle$ znajduje się co najmniej jedno miejsce zerowe wielomianu W.

442. Takie funkcje istnieją. Oto jedna z możliwych konstrukcji: określamy dwa ciągi (x_n), (y_n) wzorami $x_0 = y_0 = 1$ oraz

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (n!+1\,,\,(n+1)!) & \text{dla parzystych } n>0,\\ ((n+1)!\,,\,n!+1) & \text{dla nieparzystych } n>0.\end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że oba te ciągi są ściśle rosnące. Definiujemy funkcję f przez warunki

- $f(x_n) = y_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots;$
- f jest liniowa w każdym przedziale $\langle x_n; x_{n+1}\rangle$.

Ta funkcja jest ciągła i ściśle rosnąca. Przy tym

$$\lim_{k\to\infty}\frac{y_{2k}}{x_{2k}} = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{y_{2k+1}}{x_{2k+1}} = 0,$$

a więc funkcja $g(x) = f(x)/x$ przyjmuje zarówno wartości dowolnie wielkie, jak i wartości dowolnie bliskie 0. Z ciągłości wynika, że jej wartości wypełniają zbiór wszystkich liczb dodatnich.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **330** ($WT = 1{,}72$) i **331** ($WT = 2{,}80$)
z numeru 1/2002

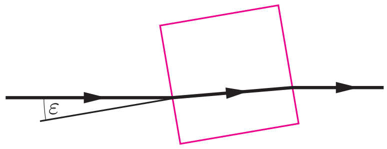
Tomasz Wietecha	– Tarnów	43,48
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	42,62
Aleksander Surma	– Myszków	40,79
Marek Wójcicki	– Szczecin	37,65

Zadania z fizyki nr 342, 343

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2002

342. Czy można tak ustawić dwie radiowe anteny nadawcze i dobrać przesunięcie fazy między sygnałami emitowanymi przez nie, aby natężenie promieniowania wynosiło 0 w kierunkach północnym i wschodnim (i tylko w tych dwóch kierunkach), a było maksymalne w kierunkach południowym i zachodnim? Każda z anten osobno wysyła falę harmoniczną o danej długości λ jednakowo we wszystkich kierunkach poziomych (np. anteny są pionowymi masztami), a natężenie ich promieniowania jest jednakowe.



Rys. 1

343. a) Na sześcian o boku $a = 5$ cm wykonany ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}5$ pada pod niewielkim kątem ε promień światła (rys. 1). Podać wzór na wartość przesunięcia równoległego tego promienia.

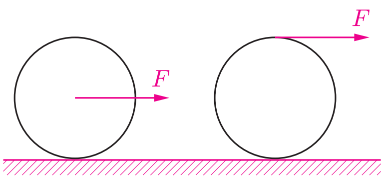
b) W jednej z metod szybkiego filmowania zamiast migawki stosowany jest obracający się sześcian, umieszczony między obiektywem a taśmą filmową. Taśma porusza się wtedy ruchem jednostajnym, a jednostajny obrót sześcianu powoduje, że każdy kolejny obraz jest względem niej nieruchomy. Jeśli sześcian opisany w punkcie a) wykonuje $f = 200$ obrotów na sekundę, to z jaką prędkością powinna przesuwać się taśma?

c) Jakie zalety może mieć zastosowanie takiego urządzenia zamiast tradycyjnego mechanizmu chwytakowego, w którym film porusza się ruchem skokowym?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2002

Przypominamy treść zadań:

338. Na dwa jednorodne i jednakowe walce spoczywające na poziomym stole działają poziome siły, przy czym w jednym z tych przypadków siła jest przyłożona do osi walca, a w drugim – do górnej krawędzi (rys. 2). Jeśli współczynnik tarcia o stół ma dla obu walców jednakową wartość, to na który walec możemy podziałać większą siłą, nie wprawiając go przy tym w poślizg? Który walec będzie się wtedy toczył z większym przyspieszeniem?



Rys. 2

339. Półkula o promieniu 10 cm wykonana ze szkła o współczynniku załamania 1,5 leży na stole płaską stroną do dołu. Nad wierzchołkiem półkuli na wysokości 3 cm znajduje się punktowe źródło światła. Ile wynosi promień oświetlonego koła na powierzchni stołu pod półkulą?

338. W przypadku siły zaczepionej w osi walca równanie ruchu postępowego ma postać $ma = F - T$, gdzie T jest siłą tarcia statycznego, skierowaną przeciwnie do F. Ruchem obrotowym wokół środka walca rządzi natomiast równanie $Tr = I\varepsilon$, gdzie I jest momentem bezwładności, a ε – przyspieszeniem kątowym. Po podstawieniu wartości $I = mr^2/2$ oraz związku $\varepsilon = a/r$ znajdujemy $F = 3T$, $a = 2T/m$. W drugim rozpatrywanym przypadku siła tarcia ma zwrot zgodny z F (przyjęcie niezmienionego zwrotu doprowadzi do wyniku $T < 0$), a równania przybierają postać

$$ma = F + T \qquad (F - T)r = I\varepsilon.$$

Okazuje się, że maksymalna siła F, która nie doprowadzi do poślizgu walca, jest równa poprzedniej ($F = 3T$), ale przyspieszenie jest dwukrotnie większe ($a = 4T/m$).

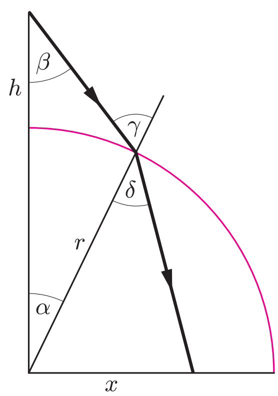
339. Rozważmy promień padający na półkulę w miejscu wyznaczonym przez wartość kąta α (rys. 3). Kąt β możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r\sin\alpha}{h + r(1-\cos\alpha)},$$

gdzie r jest promieniem półkuli, a h – wysokością źródła światła nad jej wierzchołkiem. Z kolei kąt γ jest równy sumie kątów α i β, kąt δ wyznaczymy zaś z prawa Snella ($\sin\gamma = n\sin\delta$). Odległość punktu trafienia promienia w stół od środka półkuli jest dana wyrażeniem

$$x = r\sin\alpha + r\cos\alpha\operatorname{tg}(\delta-\alpha) = r\sin\delta/\cos(\delta-\alpha).$$

Maksymalną wartość x jako funkcji kąta α można wyznaczyć prawdopodobnie tylko numerycznie.



Rys. 3

Dla podanych wartości h, r i n otrzymujemy $x_{\max} = 6{,}69$ cm (dla $\alpha = 0{,}599$ rad). Ciekawe, że maksymalna wartość x nie odpowiada tu maksymalnej wartości α, tzn. takiej, dla której promień pada na półkulę stycznie ($\gamma = 90°$).