9/02 (57)

$\Gamma \lim\limits_{n\to\infty}$ atias

O RÓWNYCH SUMACH DZIEWIĄTYCH POTĘG

Poniżej dwie równości zawierające 10 dziewiątych potęg:

(9.5.5) $192^9 + 101^9 + 91^9 + 30^9 + 26^9 = 180^9 + 175^9 + 116^9 + 17^9 + 12^9,$

(9.4.6) $90^9 + 64^9 + 35^9 + 35^9 = 86^9 + 80^9 + 62^9 + 43^9 + 27^9 + 16^9.$

Na uwagę zasługuje też równość

(9.6.6) $323^n + 289^n + 269^n + 173^n + 91^n + 7^n = 313^n + 311^n + 247^n + 193^n + 59^n + 29^n$

spełniona dla $n = 1, 3, 5, 7, 9$.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (31′)

Wyjaśnienie oszustwa (31): Sprawa jest dosyć subtelna, nie sposób **w jednej linijce** wyczerpująco zdemaskować błędu w przedstawionym poprzednio rozumowaniu.

Z grubsza rzecz biorąc, w definicji obiektu A nie można używać obiektu B, który nie jest dobrze zdefiniowany, dopóki nie określimy, czym jest A. W czasie, kiedy usiłujemy sprecyzować reguły definiowania liczb w jednej linijce, nie jest jeszcze określone, które liczby naturalne dają się w jednej linijce zdefiniować. To będzie wiadomo **nie wcześniej, niż w momencie zakończenia procesu doprecyzowania tych reguł.** Nie możemy więc używać określenia *„liczba naturalna, której nie można zdefiniować w jednej linijce”* jako legalnego określenia definiującego liczby, w trakcie ustalania tych reguł. Jedyne, co byłoby dopuszczalne, to ustalenie pewnego zbioru reguł definiujących liczby (nazwijmy go A), a następnie używanie określenia *„liczbę można zdefiniować przy użyciu reguł ze zbioru A”* przy tworzeniu nowego, nadrzędnego zbioru reguł B.

Aby lepiej to zrozumieć, przyjrzyjmy się sytuacjom pokrewnym.

Zbiór wszystkich zbiorów, czyli antynomia Russella

Naiwne przekonanie, że zbiorem jest cokolwiek, co w zrozumiały sposób możemy zdefiniować słowami, prowadzi w naturalny sposób do zbioru wszystkich zbiorów, który oznaczymy przez X. Skoro X jest zbiorem, to musi być swoim elementem, czyli $X \in X$. Drobny niepokój może budzić fakt, że aby rozumieć, czym jest dany zbiór, trzeba znać **najpierw** jego elementy, podczas gdy element X zbioru X nie będzie znany, zanim cały zbiór nie zostanie utworzony.

Na pierwszy rzut oka nie prowadzi to do jawnej sprzeczności, jeśli jednak wyróżnimy w X zbiór Z zbiorów, które nie są swoimi elementami, $Z = \{A \in X; A \notin A\}$, to staniemy przed pytaniem: czy $Z \in Z$? Dla dowolnego zbioru A mamy $A \in Z \iff A \notin A$, co dla $A = Z$ daje $Z \in Z \iff Z \notin Z$ i sprzeczność gotowa.

Zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje.

Książeczka ze zdaniami

Książeczka ma 100 stron, na których kolejno napisane są zdania:

W tej książce wszystkie zdania są fałszywe.
W tej książce jest dokładnie jedno zdanie prawdziwe.
W tej książce są dokładnie dwa zdania prawdziwe.
W tej książce są dokładnie trzy zdania prawdziwe.
...
W tej książce jest dokładnie 99 zdań prawdziwych.

Z radosną beztroską zabieramy się za powyższą łamigłówkę. Popatrzmy, zdania się wykluczają, więc zdań prawdziwych może być 0 lub 1. Jeśli jest ich 0, to pierwsze zdanie jest prawdziwe, więc to odrzucamy. Zatem musi być jedno zdanie prawdziwe... świetnie, wszystko się zgadza – jest jedno zdanie prawdziwe, to na stronie drugiej, pozostałe są fałszywe.

A co by było, gdyby książeczka wyglądała jak niżej?

W tej książce wszystkie zdania są fałszywe.
W tej książce są dokładnie dwa zdania prawdziwe.
W tej książce są dokładnie trzy zdania prawdziwe.
W tej książce są dokładnie cztery zdania prawdziwe.
...
W tej książce jest dokładnie 100 zdań prawdziwych.

Znowu, zdania się wykluczają, więc liczba zdań prawdziwych jest równa 0 lub 1. Podobnie jak poprzednio, nie może być równa 0, bo wówczas zdanie na pierwszej stronie byłoby prawdziwe. Aha, znowu jest równa 1. W tej książeczce jest dokładnie jedno zdanie prawdziwe! A przepraszam, które?

Zdanie, które powątpiewa w swoją prawdziwość

Czy prawdziwe jest następujące zdanie?

To zdanie jest fałszywe.

A to?

To zdanie jest prawdziwe.

Jeśli umówimy się oznaczać wartość logiczną zdania liczbą 0 (fałsz) lub 1 (prawda), to wartość logiczna x pierwszego zdania spełnia równanie $x = 1 - x$, co nie ma rozwiązań w zbiorze $\{0, 1\}$.

Natomiast wartość logiczna y drugiego zdania spełnia warunek $y = y$, który nie daje podstaw do jej wyznaczenia.

Widzimy, że takie pętle w definicji powodują, że usiłowanie określenia wartości logicznej zdania prowadzi do równania lub układu równań, które mogą nie mieć rozwiązań lub mieć ich wiele. Żaden problem, jeśli równanie, np. liczbowe, nie ma rozwiązań, gorzej – gdy brak rozwiązań (czyli sprzeczność) pojawia się w logice – na poziomie języka, którym chcemy się posługiwać. Równanie $z = z + 1$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, w porządku, jesteśmy do takich sytuacji przyzwyczajeni. Ale czy wyobrażacie sobie matematykę (analizę, geometrię, trygonometrię), w której liczba π byłaby zdefiniowana równaniem $\pi = \pi + 1$? Możemy mieć równania niemające rozwiązań, ale nie możemy budować matematyki, która w swoim języku używa tych nieistniejących rozwiązań. Na zakończenie dwa zdania, z których każde jest zaprzeczeniem drugiego, a oba są prawdziwe!

Liczba wyrazów w tym zdaniu jest równa osiem.

Liczba wyrazów w tym zdaniu nie jest równa osiem.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl