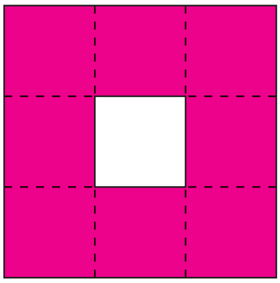
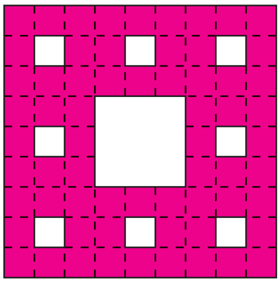
Dywan Sierpińskiego



Rys. 1



Rys. 2

Wymiar podobieństwa figury (płaskiej) to taka liczba D, że całą tę figurę można podzielić na $N = n^D$ części podobnych do całości w skali $r = \frac{1}{n}$ $(n > 1)$. Wynika stąd, że $D = \dfrac{\ln N}{\ln n}$. Nietrudno zauważyć, że jeśli podział, o którym mowa wyżej, jest możliwy, to można figurę podzielić także na N^k części o skali podobieństwa r^k, dla każdej liczby naturalnej k. Nie zmienia to jednak wymiaru, gdyż $\dfrac{k \ln N}{k \ln n} = \dfrac{\ln N}{\ln n}$. Nie dziw, że mogą się pojawić wymiary, nie będące liczbami całkowitymi (i że nie każda figura ma wymiar podobieństwa!).
Dywan Sierpińskiego jest przykładem figury z niecałkowitym wymiarem podobieństwa. Oto przepis na konstrukcję dywanu. Podzielmy kwadrat jednostkowy na 9 przystających kwadratów (o boku długości 1/3) i usuńmy środkowy z nich, czyli ten, który jest całkowicie zawarty we wnętrzu dużego kwadratu. To, co zostaje, czyli figurę złożoną z 8 przystających kwadratów, nazwijmy S_1 (rys. 1). Powtórzmy to postępowanie wobec każdego z tych 8 kwadratów. Otrzymamy 8^2 kwadratów o boku $1/3^2$ i tę figurę nazwijmy S_2 (rys. 2). Działając tak dalej, w k-tym kroku otrzymamy figurę S_k, złożoną z 8^k kwadratów o boku $1/3^k$. Dywanem Sierpińskiego nazywa się część wspólna wszystkich zbiorów S_k dla $k \in N$, czyli to, co zostaje po usunięciu wszystkich wnętrz coraz mniejszych kwadratów. Jak wynika ze wzoru, jego wymiarem podobieństwa jest liczba $\dfrac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1{,}89279$. Tak więc dywan Sierpińskiego jest fraktalem: jest figurą samopodobną (rozkłada się na części podobne do całości) i ma niecałkowity wymiar podobieństwa. Co równie ciekawe, jest także ciągłym obrazem odcinka $\langle 0, 1\rangle$, rozcinającym płaszczyznę R^2 na tyle części, że do ich ponumerowania trzeba by było użyć wszystkich liczb naturalnych.

W. B.

Słowo Banacha

Słowa składają się z liter. Te litery nadają im sens lub czynią je bezsensownymi. Sam schemat ustawienia liter na ogół nie wyznacza sensu słowa, ale może niektóre znaczenia wykluczyć. Np. pięcioliterowe słowo zbudowane z trzech liter o schemacie

$$\alpha\beta\gamma\beta\alpha,$$

może być słowem KAJAK lub NAGAN, a nie może być słowem BANAN.

W matematyce istnieją jednak słowa takie, że ich sens jest zawsze taki sam, niezależnie od tego, jakie znaczenie (spośród elementów ustalonego alfabetu) wybierzemy dla liter.
Oto takie **słowo** podane przez Stefana **Banacha**:

$$\alpha^2\beta^2\alpha^{-2}\beta^{-2}\alpha^{-2}\beta^2\alpha^4\beta^{-2}\alpha^{-2}\beta^2\alpha^{-2}\beta^{-2}\alpha^2;$$

jeżeli za α i β podstawimy dowolną izometrię zwykłej płaszczyzny euklidesowej, to słowo to oznaczać będzie identyczność, przekształcenie nieporuszające żadnego punktu.

Kolejno wypisywane symbole izometrii oznaczają ich złożenie, wykładnik -1 oznacza przekształcenie odwrotne, wykładnik 2 oznacza dwukrotne wykonanie przekształcenia itd. Przy tym napisy typu $\gamma^k\gamma^{-k}$ i $\gamma^{-k}\gamma^k$ zawsze znikają.

Izometria to przekształcenie niezmieniające żadnej odległości. Na płaszczyźnie euklidesowej każda izometria jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem (czyli złożeniem symetrii osiowej z przesunięciem równoległym do jej osi; w szczególności symetria osiowa jest symetrią z zerowym poślizgiem).

Ciekawe, że dla przestrzeni trójwymiarowej słowa takiego wymyślić się nie da (podobnie będzie dla zarówno dwu-, jak i więcejwymiarowych przestrzeni eliptycznych i hiperbolicznych).

Po co komu takie słowo? Okazuje się, że w przestrzeniach, gdzie takie słowo nie istnieje, możliwy jest *paradoksalny rozkład*, co oznacza, że gdy mamy dwa zbiory ograniczone i zawierające choćby małą kulkę (dla dwóch wymiarów – kółko), to można jeden z nich podzielić na skończoną liczbę części, z których – bez zmiany ich kształtów ani rozmiarów, czyli izometrycznie – można ułożyć drugi. W szczególności np. można kulę podzielić na pięć części, z których da się ułożyć dwie takie same kule.

Istnienie takiego słowa mówi, że dowolne izometrie są tak wzajemnie powiązane, że podobne figle są niemożliwe. Banach, znajdując to słowo, wykazał, że na płaszczyźnie euklidesowej paradoksalnego rozkładu nie ma. Nie wiedział, że jest to jedyna przyzwoita geometria o tej własności – rzecz została dowiedziona w kilku podejściach i jest wiadoma od 1987 roku.

Ciekawe, że krótsze słowo o tej własności nie istnieje.

M. K.