Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **328** ($WT = 1{,}36$) i **329** ($WT = 2{,}98$), z numeru 12/2001

Jacek Piotrowski	– Rzeszów	46,56
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	42,62
Aleksander Surma	– Myszków	39,95
Tomasz Wietecha	– Tarnów	39,24
Marek Wójcicki	– Szczecin	33,69
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	16,71

Po długiej przerwie przybył nowy członek **Klubu 44 F** – p. Jacek Piotrowski.

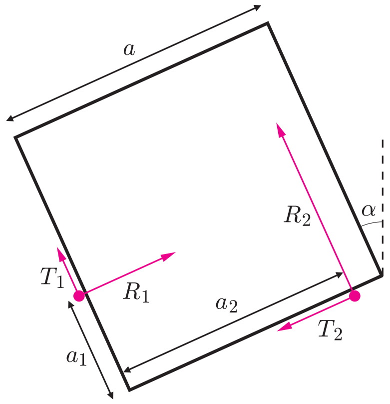
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2002

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

336. Sześcian o boku a leży na dwóch równoległych i znajdujących się na tej samej wysokości poziomych prętach odległych wzajemnie także o a. W jakim zakresie kątów α (zob. rys. 1) sześcian może być w równowadze, jeśli współczynnik tarcia między prętami a sześcianem jest równy $\mu = 0{,}2$?

337. Magnes wytwarza w przestrzeni między wewnętrznym walcem (biegunem N) a zewnętrzną powłoką walcową (biegunem S) radialne pole magnetyczne (rys. 2), którego indukcja w odległości a od osi walca wynosi B_a; wartość ta jest niezależna od współrzędnej pionowej. Linie pola zamykają się od dołu (tzn. w zewnętrznej powłoce biegną w dół, a dalej do wewnątrz i wzdłuż wewnętrznego walca do góry). Jeśli w przestrzeni między biegunami spada swobodnie pierścień o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym b oraz grubości d, wykonany z niemagnetycznego metalu o gęstości ρ i przewodnictwie właściwym σ, to jaką prędkość osiągnie po długim czasie?
Wariant nieco łatwiejszy: rozważyć cienki pierścień, tzn. b niewiele większe od a.



Rys. 1

336. Oznaczmy siły reakcji działające na sześcian ze strony prętów przez R_1 i R_2, a siły tarcia – przez T_1 i T_2 (zob. rys. 1). Zwroty sił tarcia zostały wybrane tak, aby „sprzeciwiały się" one powrotowi sześcianu do położenia równowagi, w którym $\alpha = 45°$. Warunkiem równowagi sześcianu jest spełnienie równań

$$R_2 \sin\alpha + T_1 \sin\alpha + T_2 \cos\alpha = R_1 \cos\alpha,$$

$$T_1 + T_2 \frac{a}{2} = R_2\Big(a_2 - \frac{a}{2}\Big) + R_1\Big(\frac{a}{2} - a_1\Big).$$

Należy tu podstawić

$$a_1 = a\sin\alpha, \quad a_2 = a\cos\alpha, \quad T_1 \leqslant \mu R_1, \quad T_2 \leqslant \mu R_2.$$

Po przekształceniach dochodzimy do wniosku, że dla sił różnych od zera powyższe równania będą spełnione, jeśli

$$(1+\mu^2)(\cos\alpha - \sin\alpha) + 2\mu \sin 2\alpha \geqslant 2\cos 2\alpha.$$

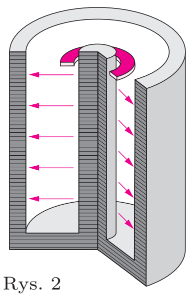
Dalsza analiza prawdopodobnie musi już opierać się na obliczeniach numerycznych. Dla $\mu = 0{,}2$ dozwolony zakres kątów α to przedział od $36{,}2°$ do $45°$. Do tego należy, oczywiście, dodać symetryczny przedział od $45°$ do $53{,}8°$ (wtedy siły tarcia miałyby przeciwne zwroty).

337. Gdy pierścień opada o dh, strumień pola obejmowanego przez dowolny okrąg w tym pierścieniu zmienia się o

$$\mathrm{d}\Phi = B_a \cdot 2\pi a \ \cdot \mathrm{d}h,$$

zatem SEM indukcji w każdym takim okręgu wynosi

$$\mathcal{E} = 2\pi a v B_a.$$


Rys. 2

Rozważmy fragment pierścienia zawarty pomiędzy promieniami r i $r + \mathrm{d}r$.

Opór tego fragmentu wynosi

$$R = 2\pi r/(d\sigma \mathrm{d}r),$$

czyli popłynie przez niego prąd o natężeniu

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathcal{E}}{R} = a d v \sigma B_a \mathrm{d}r/r,$$

a siła działająca na taki przewodnik w radialnym polu magnetycznym będzie zgodnie z regułą Lenza skierowana do góry i równa

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}I \cdot 2\pi r B,$$

gdzie $B = B_a a/r$ (według prawa Gaussa radialne pole maleje ze wzrostem odległości r od osi jak $1/r$). Zatem

$$\mathrm{d}F = 2\pi a^2 d v \sigma B_a^2 \mathrm{d}r/r,$$

co po scałkowaniu daje

$$F = 2\pi a^2 d v \sigma B_a^2 \ln(b/a).$$

Tę siłę przyrównamy teraz do ciężaru pierścienia

$$P = \pi(b^2 - a^2) d \varrho g,$$

skąd ostatecznie wyznaczamy

$$v = \frac{(b^2/a^2 - 1)\varrho g}{2\sigma B_a^2 \ln(b/a)},$$

co dla b niewiele większych od a sprowadza się do

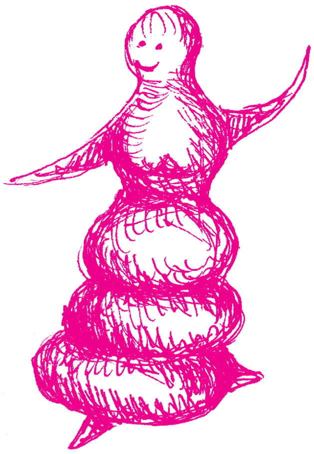
$$v = \frac{\varrho g}{\sigma B_a^2}.$$

Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\int\!\!\!\!\sum !} = 44$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **431** ($WT = 1{,}95$) i **432** ($WT = 1{,}64$),
z numeru 12/2001

Jacek Klisowski	– Lublin	41,57
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	36,38



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2002

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

439. Rozważamy graf skierowany o skończonym zbiorze wierzchołków V. Każde dwa różne punkty (wierzchołki) $v_1, v_2 \in V$ łączy co najwyżej jedna z dwóch zorientowanych krawędzi: $v_1 \to v_2$ lub $v_2 \to v_1$. Punkt w jest *osiągalny* z punktu v, jeśli startując z v można dotrzeć do w idąc wzdłuż krawędzi grafu zgodnie z ich orientacją. Zbiór $Z \subset V$ jest *docelowy*, gdy spełnia warunki:

(i) z każdego punktu $v \in V$ jest osiągalny pewien punkt $z \in Z$;

(ii) z żadnego punktu $z \in Z$ nie jest osiągalny żaden inny punkt $z' \in Z$.

Udowodnić, że wszystkie zbiory docelowe są równoliczne.

440. Wyznaczyć największą wartość, jaką może mieć suma pól dwóch kół bez wspólnych punktów wewnętrznych, umieszczonych w kwadracie o boku długości 1.

439. Napis $v \longrightarrow w$ będzie oznaczał, że punkt w jest osiągalny z punktu v.

Niech Y i Z będą dwoma różnymi zbiorami docelowymi. Wykażemy następujące dwie własności:

(1) jeżeli $y \in Y, z \in Z, z \longrightarrow y$, to $y \longrightarrow z$;

(2) jeżeli $y_1, y_2 \in Y, z \in Z, z \longrightarrow y_1, z \longrightarrow y_2$, to $y_1 = y_2$.

Przyjmijmy przesłanki zdania (1). Z punktu y jest osiągalny pewien punkt $z' \in Z$ (warunek (i) z treści zadania): $y \longrightarrow z'$. Z przechodniości relacji $\longrightarrow$ wynika, że $z \longrightarrow z'$. Zatem $z = z'$ na mocy warunku (ii), więc $y \longrightarrow z$.

Przyjmijmy teraz przesłanki zdania (2). Z własności (1) wynika, że $y_1 \longrightarrow z$; stąd (wobec $z \longrightarrow y_2$) wnosimy, że $y_1 \longrightarrow y_2$ i z warunku (ii) $y_1 = y_2$.

Własności (1) i (2) zostały wykazane. Warunek (i) gwarantuje, że

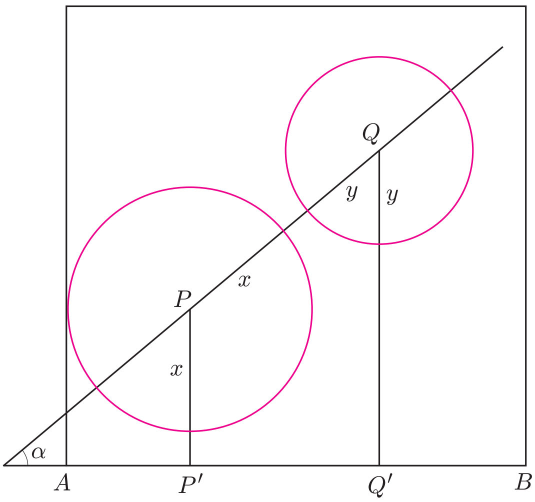
(3) $\forall\, y \in Y\ \exists\, z \in Z\colon\ y \longrightarrow z$ oraz $\forall\, z \in Z\ \exists\, y \in Y\colon\ z \longrightarrow y$.

Własności (1), (2) i (3) pokazują, że łącząc każdy punkt $z \in Z$ w parę z jedynym punktem $y \in Y$ spełniającym równoważne warunki $z \longrightarrow y$, $y \longrightarrow z$, otrzymujemy bijekcję między zbiorami Z i Y. Zatem zbiory Y i Z są równoliczne.

440. Załóżmy, że koło o środku P i promieniu x oraz koło o środku Q i promieniu y leżą w kwadracie jednostkowym i nie mają wspólnych punktów wewnętrznych. Prosta PQ tworzy kąt $\alpha \leqslant 45°$ z którąś parą równoległych boków kwadratu. Niech P' i Q' będą rzutami prostokątnymi punktów P i Q na jeden z tych boków; oznaczmy jego końce przez A (bliżej punktu P') i B (bliżej Q'). Mamy nierówności

$$1 = |AP'| + |P'Q'| + |Q'B| \geqslant x + (x+y)\cos\alpha + y \geqslant (x+y)(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2});$$

stąd $x + y \leqslant 2 - \sqrt{2}$.



Można przyjąć, że $x \geqslant y$. Jeżeli $x - y \leqslant \sqrt{2} - 1$, to

$$2(x^2 + y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2 \leqslant \leqslant \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 9 - 6\sqrt{2},$$

czyli $\quad x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{9}{2} - 3\sqrt{2}$.

Jeśli zaś $x - y \geqslant \sqrt{2} - 1$ (więc $y \leqslant x + 1 - \sqrt{2}$), to także

$$x^2 + y^2 \leqslant x^2 + \left(x + 1 - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - 3\sqrt{2}.$$

W każdym przypadku suma pól obu kół nie przekracza $\left(\frac{9}{2} - 3\sqrt{2}\right)\pi$. Jest to szukane maksimum, bowiem dla $\alpha = 45°$ oraz $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ wszystkie napisane nierówności stają się równościami; odpowiada to sytuacji, gdy większe koło jest wpisane w kwadrat, a mniejsze jest styczne do większego i do dwóch boków kwadratu.